1.7. Der Raum $L_1(\mu)$

Wir haben festgestellt, dass die Addition zweier μ-integrierbaren Funktionen wieder eine integrierbare Funktion ergibt und Gleiches für die Multiplikation mit einer reellen Zahl gilt.

Folgerung: Die Menge aller μ-integrierbaren Funktionen $f: \Omega \to [-\infty, \infty]$ bildet einen Vektorraum, den wir mit $L_1(\mu)$ bezeichnen.

Wir wollen daraus einen normierten Raum machen und führen dazu ein die L_1-Halbnorm

$$\|f\|_1 := \int |f| \, d\mu .$$

$\|f\|_1$ ist deshalb nur eine Halbnorm, weil zwar $f=0 \Rightarrow \|f\|_1 = 0$ gilt, aber nicht die Umkehrung. Ist $N \subset \Omega$ eine nichtleere Nullmenge und setzen wir

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in N \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

dann ist f nicht die Nullfunktion, aber es gilt $\|f\|_1 = 0$.

Offenbar gilt:

$$\|f\|_1 = 0 \iff f(x) = 0 \text{ fast überall}$$

Beweis: $\Rightarrow$)

Sei $\int |f| d\mu = 0$ und $N = \{x : |f(x)| > 0\}$

$$N = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : |f(x)| \geq \tfrac{1}{n}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : \tfrac{1}{n} \leq |f(x)| < \tfrac{1}{n-1}\}$$

Alle diese zuletzt definierten Mengen sind disjunkt. Gilt $\mu(N) \neq 0$, dann hat eine dieser Mengen, sagen wir Nr. k, positives Maß $m > 0$.

$$\Rightarrow \int |f| d\mu \geq \int_{\frac{1}{n} \leq f < \frac{1}{n-1}} |f| \, d\mu \geq \frac{1}{n} \cdot m > 0 \ \lightning .$$

$\Rightarrow \mu(N) = 0$.

$\Leftarrow$) Gilt $f = 0$ f.ü., dann folgt $\mu(N) = 0$ und

$$\int |f|\,d\mu = \underbrace{\int_{\{f=0\}} \underbrace{|f|}_{=0}\,d\mu}_{\substack{=0 \\ \text{weil } f=0}} + \underbrace{\int_N |f|\,d\mu}_{\substack{=0 \\ \text{weil } \mu(N)=0}} = 0 \qquad \square$$

Um aus $L_1(\mu)$ einen normierten Raum zu machen, führt man Äquivalenzklassen fast überall gleicher Funktionen ein.

Dazu: • Äquivalenzrelation "$\sim$",

$$f \sim g \iff f(x) = g(x) \text{ für fast alle } x$$

• Äquivalenzklassen

$$[f] = \{g : g \sim f\}$$

Def. 1.55 Unter $L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ – kurz $L_1(\mu)$, wenn Ω und $\mathcal{A}$ klar sind aus dem Zusammenhang – verstehen wir den Vektorraum aller Äquivalenzklassen fast überall gleicher μ-integrierbarer Funktionen, versehen mit der Norm

$$\|[f]\|_1 = \int |f|\,d\mu = \|f\|_1 .$$

Bemerkungen

(i) Die Struktur eines Vektorraumes muss man sich noch klar machen. z.B. gilt offenbar

$$[f] + [g] = [f+g], \quad [cf] = c[f]$$

(ii) Zur Berechnung der Norm $\|[f]\|_1$ kann jeder beliebige Repräsentant der Klasse $[f]$ genommen werden (warum?)

(iii) Nun gilt $\quad \|[f]\|_1 = 0 \iff [f] = [0]$, denn

$$\int |f|\,d\mu = 0 \iff f \sim 0 \iff f \in [0].$$

(iv) $\|[f]\|_1$ erfüllt wirklich alle Eigenschaften einer Norm!

Etwas Vorsicht gebietet der Umgang mit den Elementen aus $L_1(\mu)$. Eigentlich sind es Äquivalenzklassen, es hat sich aber eingebürgert, die Elemente als Funktionen zu betrachten, indem man einen beliebigen Repräsentanten auswählt.

Bei Integrationen kann dabei nichts passieren, aber bei allen punktweisen Definitionen muss man vorsichtig sein.

Falsch wäre z.B. (vgl. Behrends, Maß- u. Integrationstheorie)

"Sei $f \in L_1(\mu)$. Wir definieren

$$M = \{x : f(x) \neq 0\}"$$

Die Menge M ist offenbar nicht wohldefiniert!

Def 1.56 Es seien $A_1, \dots, A_n$ messbare Mengen und $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ beliebig gegeben. Dann heißt

$$f = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{A_k}$$

Treppenfunktion.

Die A_i müssen nicht disjunkt sein, aber in jedem Fall hat f nur endlich viele verschiedene Funktionswerte $\beta_1, \dots, \beta_m$.

Durch die Wahl $\tilde{A}_i := f^{-1}(\beta_i)$ kann man Disjunktheit der Mengen erreichen.

Offenbar ist jede Treppenfunktion als Differenz zweier Elementarfunktionen darstellbar.

Satz 1.57 Zu jeder integrierbaren Funktion f existiert eine Folge (f_n) von Treppenfunktionen mit

$$f_n(x) \to f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad n \to \infty$$

(punktweise Konvergenz) und

$$\| f_n - f \|_1 \to 0, \quad n \to \infty.$$

Beweis f^- und f^+ sind punktweise Grenzwerte monotoner Folgen (f_n^-), (f_n^+) von Elementarfunktionen (Satz 1.42); $f_n := f_n^+ - f_n^-$ ist eine Treppenfunktion.
Es gilt

$$|f_n(x)| = f_n^+(x) + f_n^-(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Monotonie}}}{\leq} f^+(x) + f^-(x) = |f(x)|$$

$\Rightarrow f$ ist integrierbare "Majorante". Außerdem

$$f_n(x) \to f^+(x) - f^-(x) = f(x).$$

Satz von Lebesgue $\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \int |f - f_n| \, d\mu = \int \underbrace{\lim |f - f_n|}_{=0} \, d\mu = 0$$

Wir nehmen hier als Majorante

$$g := 2|f|,$$

denn $$|f - f_n| \leq |f| + |f_n| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Monotonie}}}{\leq} 2|f|. \qquad \square$$

Damit liegen die Treppenfunktionen dicht im Raum $L_1(\mu)$, d.h. jedes f (genauer $[f]$...) lässt sich im Sinne der Norm $\|\cdot\|_1$ beliebig genau durch Treppenfunktionen approximieren.

Langsam sehnt man sich danach, Integrale auch konkret und ohne große Klimmzüge ausrechnen zu können. Dazu betrachten wir den Fall $\mathcal{B} = \mathbb{R}$ mit dem Lebesgue-Maß λ und zeigen, dass auf kompakten Mengen $[a,b]$ das Regelintegral mit dem Lebesgue-Integral übereinstimmt, sofern das erste existiert. Wir gehen dann vor wie im Skript Analysis III von D. Ferus.

Satz 1.58 Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion, dann ist f auch Lebesgue-integrierbar auf $[a,b]$ und

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f\,d\lambda.$$

Beweis: Nach Def. einer Regelfunktion existiert eine Folge von Treppenfunktionen (t_n), $t_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

$$|t_n(x) - f(x)| \le \varepsilon_n, \qquad (*)$$

wobei (ε_n) eine positive Nullfolge ist. Um in die Begriffswelt des Lebesgue-Integrals zu kommen, setzen wir f mit Null auf ganz $\mathbb{R}$ fort,

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \notin [a,b] \\ f(x), & \text{sonst} \end{cases}$$

und behalten die Bezeichnung von f bei. Wir können nun $(*)$ umformulieren als

$$\underbrace{t_n - \varepsilon_n \chi_{[a,b]}}_{g_n} \le f(x) \le t_n + \varepsilon_n \chi_{[a,b]},$$

wobei wir auch die t_n analog zu f mit Null auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt haben. Wir setzen g_n wie angegeben fest und erhalten so eine Folge von Treppenfunktionen. Definieren weiter

$$h_n := \sup(g_1, \dots, g_n).$$

Dann ist (h_n) eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen. Es gilt

$$g_n \le h_n \le f \le (\sup|f|)\,\chi_{[a,b]}. \qquad (**)$$

Klar ist, dass g_n punktweise gegen f konvergiert, folglich auch h_n. Die obere Schranke in $(**)$ zeigt

$$\int h_n\,d\lambda \le \sup|f| \int \chi_{[a,b]}\,d\lambda = \sup|f|\,(b-a),$$

damit ist die Integralfolge $\int h_n\,d\mu$ beschränkt. Nach Definition des Regelintegrals bzw. Lebesgue-Integrals gilt

$$\int h_n\,d\lambda \to \int f\,d\lambda = \int_{[a,b]} f\,d\lambda \qquad n \to \infty$$

$$\int h_n\,d\lambda = \int_a^b h_n\,dx \to \int_a^b f\,dx.$$

Daraus folgt die Behauptung

$\square$

Zum Verständnis des nächsten Satzes rufen wir uns ins Gedächtnis zurück, dass unser Maß μ durch Fortsetzung eines Prämaßes aus dem Inhalt von Elementarmengen konstruiert sein kann. Im Falle des Lebesgue-Maßes im $\mathbb{R}^d$ waren das die Quader.

Satz 1.59 Ist der Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ durch Fortsetzung aus den Mengen eines Rings $\mathcal{R}$ (den Elementarmengen) entstanden, so gibt es zu jedem $f \in L_1$ und jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Linearkombination

$$g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$$

charakteristischer Funktionen von Elementarmengen E_i mit

$$\| f - g \|_1 < \varepsilon .$$

Beweis: Nach Satz 1.57 finden wir eine Treppenfunktion

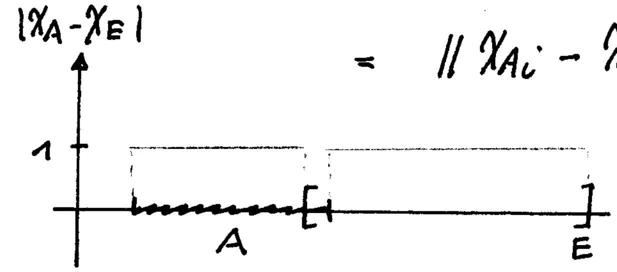
$$\tilde{f} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$$

mit $\| f - \tilde{f} \|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$, wobei die A_i messbare Mengen mit $\mu(A_i) < \infty$ sind. Dabei können wir paarweise Disjunktheit der A_i voraussetzen. Die A_i sind also endlich messbar (Satz 1.23) und somit existieren Elementarmengen E_i, so dass

$$d(A_i, E_i) \leq \delta,$$

wenn wir $\delta > 0$ vorgeben. Wir haben

$$\begin{aligned} d(A_i, E_i) &= \mu(A_i \setminus E_i) + \mu(E_i \setminus A_i) \\ &= \int_{A_i \setminus E_i} d\mu + \int_{E_i \setminus A_i} d\mu \\ &= \int | \chi_{A_i} - \chi_{E_i} | \, d\mu \\ &= \| \chi_{A_i} - \chi_{E_i} \|_1 \end{aligned}$$



$$\Rightarrow \|\tilde{f} - g\|_1 = \int \Big| \sum_1^n \alpha_i (\chi_{E_i} - \chi_{A_i}) \Big| \, d\mu$$

$$\le \sum_1^n |\alpha_i| \, \|\chi_{E_i} - \chi_{A_i}\|_1 \le \delta \sum_1^n |\alpha_i| < \frac{\varepsilon}{2},$$

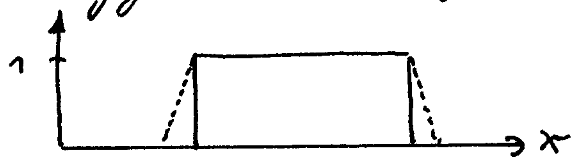
wenn δ entsprechend klein vorgegeben wird. Daraus folgt mit der Dreiecksungleichung sofort $\|f - g\|_1 < \varepsilon$. $\square$

<u>Folgerungen</u>

(i) Die Menge der so konstruierten Treppenfunktionen liegt dicht im Raum $L_1(\mu)$.

(ii) Im Falle des Lebesgue-Borelschen Maßes kann man als Mengen E_i Quader wählen.

Die Menge der stetigen Funktionen liegt dicht in $L_1(\lambda)$, denn charakteristische Funktionen von Quadern kann man beliebig genau durch stetige approximieren.



$(d=1)$

<u>Satz 1.60</u> Der Raum $L_1(\mu)$ ist vollständig, also ein Banachraum.

<u>Beweis:</u> Sei (f_n) eine Cauchyfolge in $L_1(\mu)$. Zu zeigen ist die Existenz eines zugehörigen Grenzwerts f in $L_1(\mu)$.
Wir wissen, dass alle f_n f.ü. endliche Funktionen sind.
Durch Abändern auf einer Nullmenge können wir annehmen, dass sie überall in Ω endlich sind (genau: wir haben einen überall endlichen Repräsentanten von $[f_n]$ ausgewählt).
Nach Def. der Cauchyfolge existiert für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $n(k)$ mit

$$\|f_n - f_m\|_1 < 2^{-k} \quad \forall n, m \ge n(k).$$

Daraus folgt leicht die Existenz einer Teilfolge (f_{n_k}) mit

$$\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\| < 2^{-k}, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Wir setzen

$$g_k := f_{n_k}.$$

Setzen
$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |g_{k+1}(x) - g_k(x)|$$
$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} |g_{k+1}(x) - g_k(x)|}_{s_n(x)}.$$

Als punktweiser Grenzwert ist s messbar. Außerdem gilt
$$\|s_n\|_1 \le \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\|g_{k+1} - g_k\|_1}_{\le 2^{-k}} \le \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < \infty.$$

Offenbar ist (s_n) monoton wachsend. Satz von B. Levi über die monotone Konvergenz $\Rightarrow$
$$\int s\,d\mu = \int \lim_{n\to\infty} s_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int s_n\,d\mu < \infty.$$

Folglich gilt $s \in L_1(\mu)$ und s ist f.ü. endlich, sagen wir mit Ausnahme einer Nullmenge N. Deshalb ist für jedes $x \in \Omega\setminus N$ die Folge reeller Zahlen $(g_k(x))$ eine Cauchyfolge (warum ?). Wir setzen
$$\tilde{g}_k(x) = \begin{cases} g_k(x), & x \in \Omega\setminus N \\ 0, & x \in N. \end{cases}$$

Diese Funktionen sind sämtlich messbar, ihre punktweise Grenzfunktion f,
$$f(x) := \lim_{k\to\infty} \tilde{g}_k(x)$$
auch. Außerdem
$$|g_n| = |g_1 + (g_2 - g_1) + (g_3 - g_2) + \ldots + (g_n - g_{n-1})|$$
$$\le |g_1| + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} |g_k - g_{k-1}|}_{s_{n-1}} \le |g_1| + s$$

$\Rightarrow |g_n|$ ist durch integrierbare Funktion beschränkt.

Satz von Lebesgue $\Rightarrow$
$$\lim_{k\to\infty} \|f - \tilde{g}_k\|_1 = \lim_{k\to\infty} \int |f - \tilde{g}_k|\,d\mu \overset{\text{Satz}}{=} \int \underbrace{\lim_{k\to\infty} |f - \tilde{g}_k|}_{=0}\,d\mu = 0.$$