Fast überall gilt $f_{n_k} = \tilde{g}_k$, deshalb auch

$$\| f - f_{n_k} \|_1 \to 0, \quad k \to \infty.$$

Damit ist f ein Häufungspunkt der Folge (f_n) und deshalb deren Grenzwert, da eine Cauchyfolge höchstens einen besitzt. □

Bemerkung Aus dem Beweis folgt eine wichtige Zusatzinformation:

Konvergiert eine Folge integrierbarer Funktionen (f_n) im Sinne der L_1-Norm gegen f, d.h. $\| f_n - f \|_1 \to 0$, $n \to \infty$, dann existiert eine Teilfolge, die fast überall gegen f konvergiert,

$$f_{n_k}(x) \to f(x) \quad \text{f.ü.}$$

Neben dem Raum $L_1(\mu)$ interessieren auch Räume mit Funktionen, die mit größerer Potenz als 1 integrierbar sind.

Def. 1.61 Unter $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, $1 \le p < \infty$, versteht man den Raum aller (Äquivalenzklassen von f.ü. gleichen) meßbaren Funktionen $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$ mit der Norm

$$\| f \|_p := \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Man zeigt, daß durch $\| \cdot \|_p$ wirklich eine Norm definiert ist. Dazu verwendet man die Minkowskische Ungleichung

$$\boxed{\left(\int |f+g|^p \, d\mu \right)^{1/p} \le \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} + \left(\int |g|^p \, d\mu \right)^{1/p}}$$

für alle $f, g \in L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, $1 \le p < \infty$. Wichtig ist auch die Höldersche Ungleichung

$$\boxed{\int |f g| \, d\mu \le \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \left(\int |g|^q \, d\mu \right)^{1/q}}$$

falls: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 < p < \infty$,

$f \in L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und $g \in L_q(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Der Exponent q heißt *zu p konjugierter Exponent*.

Der Beweis dieser Ungleichungen findet sich in den meisten Lehrbüchern zur Analysis, z.B. auch in Behrends, Maß- und Integrationstheorie oder Forster, Analysis 3.

Auch die Räume $L_p(\mu) := L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sind vollständig.
Von besonderem Interesse ist der Fall $p = 2$. Hier folgt $q = 2$, so dass man Produkte $f g$ mit $f, g \in L_2(\mu)$ integrieren kann. Den Ausdruck

$$(f, g)_{L_2(\mu)} := \int f g \, d\mu$$

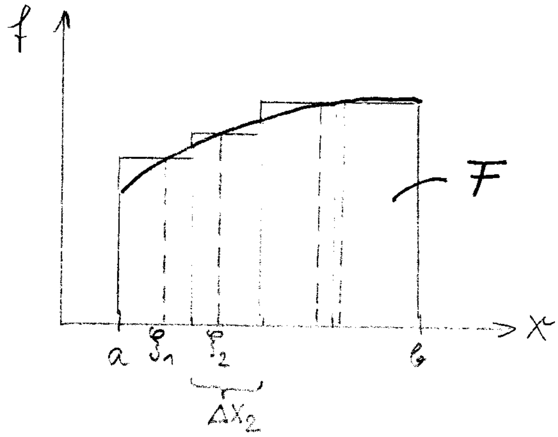
bezeichnet man als *Skalarprodukt*. Auf diese Weise wird $L_2(\mu)$ zu einem *Hilbertraum*.

1.8. Produktmaße

<u>Vorbemerkungen</u> – unterwegs zur mehrdimensionalen Integration.

Die Zielstellung der weiteren Untersuchungen erschließt sich am besten mit folgender Plausibilitätsbetrachtung, die auf der Riemannschen Integrationsidee beruht. Betrachten wir Flächen-, Volumen- und Massebestimmung.

(i) <u>Flächen unter Graphen</u> $\quad f : [a,b] \to \mathbb{R}$



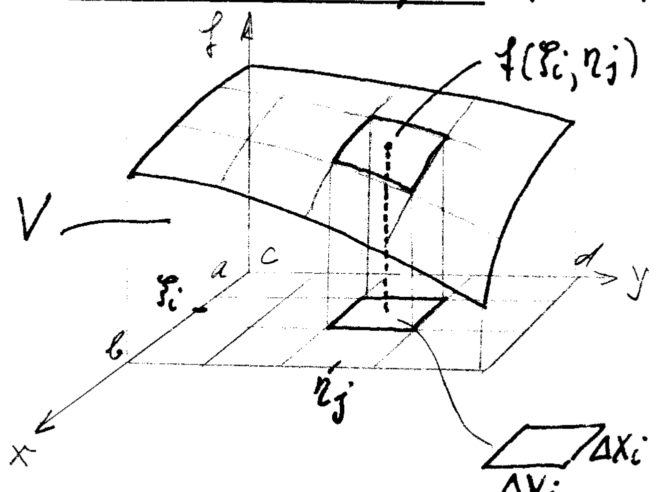
$$F \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta x_i$$

$$\downarrow$$

$$F = \int_a^b f(x)\, dx$$

Hier werden Funktionswerte $f(\xi_i)$ mit dem Maß Δx_i der (eindimensionalen) Teilintervalle multipliziert.

(ii) <u>Volumen unter Graphen</u> $\quad f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$



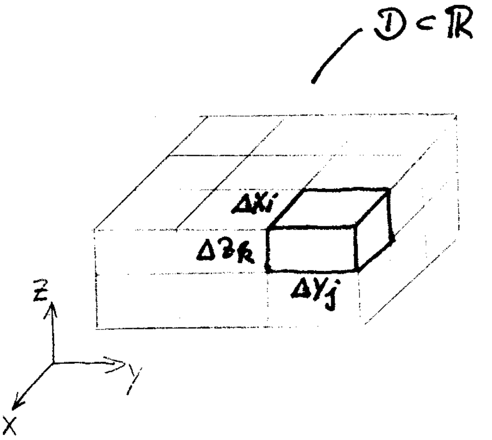
$$V \approx \sum_{i,j} f(\xi_i, \eta_j)\, \Delta x_i \cdot \Delta y_j$$

$$\downarrow$$

$$V = \int_a^b \int_c^d f\, dx\, dy$$

Funktionswerte $f(\xi_i, \eta_j)$ (Höhen von Prismen) werden mit dem Maß $\Delta x_i \cdot \Delta y_j$ kleiner Grundflächen multipliziert. Dieses Maß ist gleich dem Produkt "eindimensionaler" Maße.

(iii) <u>Massebrechnung 3-dimensionaler Körper</u> $f = f(x,y,z) : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$



f : Massendichte

Masse m

$$m \approx \sum_{i,j,k} f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)\,\Delta x_i \cdot \Delta y_j \cdot \Delta z_k$$

$$\downarrow$$

$$\iiint_{\mathcal{D}} f \; dx\,dy\,dz$$

Hat f die Massendichte 1, dann kommt als Maßzahl das Volumen von $\mathcal{D}$ heraus...

Bei $\mathcal{D}$ mit krummer Oberfläche:

$$m \approx \sum_j f(P_j)\,\lambda(\mathcal{D}_j)$$

Wir sehen die Notwendigkeit, uns mit Produktmaßen zu befassen, sehen aber auch, wozu mehrdimensionale Integration dienen kann.

Nun gehen wir wieder axiomatisch vor und arbeiten in allgemeinen Maßräumen.

<u>Def. 1.62</u> Es seien $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ zwei σ-Algebren über den Grundmengen $\mathfrak{X}_1$ und $\mathfrak{X}_2$. Die von allen Mengen $A_1 \times A_2$, $A_i \in \mathcal{A}_i$, erzeugte σ-Algebra über $\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2$ heißt <u>Produkt-σ-Algebra</u> und wird mit $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ bezeichnet.

b.w.

Nehmen wir die σ-Algebra $\mathcal{A}$ der Borelmengen aus $\mathbb{R}$, erzeugt durch Intervalle. $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ besteht dann aus beliebigen Produkten $A_1 \times A_2$ von Borelmengen. Kann $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ aus Produkten von 1-d-Intervallen erzeugt werden? <u>Beachte</u>: $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \neq \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ i.a.!

<u>Satz 1.63</u> Erzeugen die Mengensysteme $\mathcal{E}_1$ und $\mathcal{E}_2$ die σ-Algebren $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ und gilt

$$\mathfrak{X}_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_i^{(k)}$$

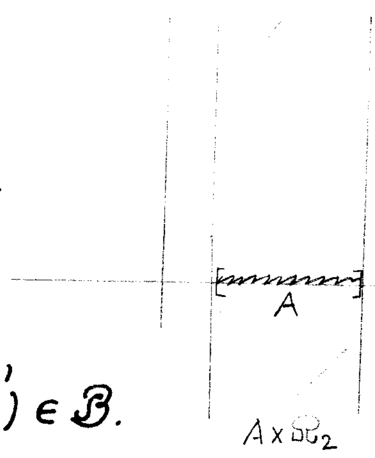
mit Folgen $(E_i^{(k)})_k$ aus $\mathcal{E}_i$, $i = 1,2$, dann wird $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ durch $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$ erzeugt.

<u>Beweis:</u> Sei $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ und $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ die von $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$ erzeugte σ-Algebra.

Betrachten zunächst

$$\mathcal{B}_1 = \{ A \subset \mathfrak{R}_1 : \; A \times \mathfrak{R}_2 \in \mathcal{B} \}.$$

$\mathcal{B}_1$ ist eine σ-Algebra.



Für alle $E_1 \in \mathcal{E}_1$ gilt

$$E_1 \times \mathfrak{R}_2 = E_1 \times \bigcup_k E_2^{(k)} = \bigcup_k \underbrace{(E_1 \times E_2^{(k)})}_{\in \mathcal{B}} \in \mathcal{B}.$$

Daher gilt $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{B}_1$, folglich

$$\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{B}_1,$$

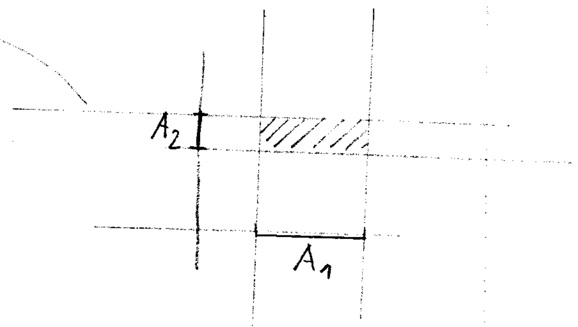
denn $\mathcal{A}_1$ wird durch $\mathcal{E}_1$ erzeugt. Folglich

$$A_1 \times \mathfrak{R}_2 \in \mathcal{B} \qquad \forall A_1 \in \mathcal{A}_1$$

analog $\mathfrak{R}_1 \times A_2 \in \mathcal{B} \qquad \forall A_2 \in \mathcal{A}_2$

$\Rightarrow \quad A_1 \times A_2 = (A_1 \times \mathfrak{R}_2) \cap (\mathfrak{R}_1 \times A_2) \in \mathcal{B} \qquad \forall A_1, A_2 \in \dots$

$\Rightarrow \quad \mathcal{A} \subset \mathcal{B}.$



Wegen $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ folgt $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. □

Für Räume $\mathbb{R}^d$ ergibt sich als Spezialfall:

<u>Folgerung</u> Ist $\mathcal{A}_1$ die σ-Algebra der Borelmengen über $\mathbb{R}^m$ und entsprechend $\mathcal{A}_2$ über $\mathbb{R}^n$, so ist $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ die σ-Algebra der Borelmengen über $\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

<u>Denn:</u> Wir nehmen als Erzeugendensystem $\mathcal{E}_1$ die Menge aller m-dimensionalen Quader, für $\mathcal{E}_2$ die n-dimensionalen. Deren Produkte $E_1 \times E_2$ liefern gerade $m+n$-dimensionale, und aus denen war die σ-Algebra der Borelmengen über $\mathbb{R}^{m+n}$ entstanden (nach Def.).

<u>Bemerkung</u>: Es ist nicht von vornherein klar, dass das Produkt von Borelmengen aus $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ wieder eine solche ergibt, nämlich eine aus $\mathbb{R}^{m+n}$.

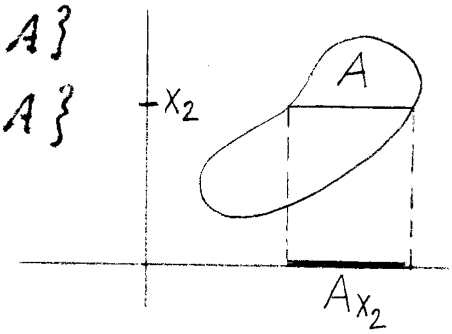
Wir gehen nun umgekehrt vor und betrachten "Schnitte" von Mengen aus $\Omega_1 \times \Omega_2$:

<u>Def 1.64</u> Es sei $A \subset \Omega_1 \times \Omega_2$. Dann heißen die Mengen

$$A_{x_1} = \{ x_2 \in \Omega_2 : (x_1, x_2) \in A \}$$

$$A_{x_2} = \{ x_1 \in \Omega_1 : (x_1, x_2) \in A \}$$

x_1- bzw. x_2-Schnitt von A.

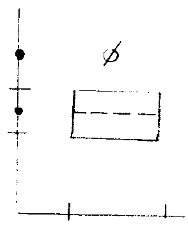


<u>Satz 1.65</u> Gehört A zu $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, so liegen alle Schnitte A_{x_1} in $\mathcal{A}_2$ und alle A_{x_2} in $\mathcal{A}_1$.

<u>Beweis</u>: Sei $x_2 \in \Omega_2$ fest gegeben und

$$\mathcal{B} := \{ A \subset \Omega_1 \times \Omega_2 : A_{x_2} \in \mathcal{A}_1 \}.$$

$\mathcal{B}$ ist eine σ-Algebra. Nun gilt



$$\underset{\text{für } x_2 \in A_2}{(A_1 \times A_2)_{x_2} = A_1}, \quad \underset{\text{für } x_2 \notin A_2}{(A_1 \times A_2)_{x_2} = \emptyset}.$$

Somit folgt insbesondere für alle $A_1 \subset \mathcal{A}_1$ und $A_2 \subset \mathcal{A}_2$, dass

$$(A_1 \times A_2)_{x_2} \in \mathcal{A}_1 \qquad (\text{unabh. von } x_2).$$

Das zeigt

$$\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{B}$$

und deshalb auch

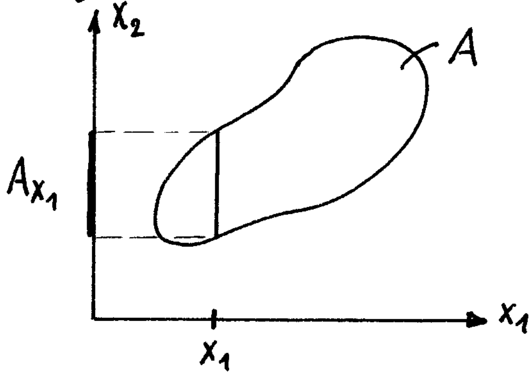
$$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{B}.$$

Alle x_2-Schnitte von $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ gehören also zu $\mathcal{A}_1$. $\square$

Nach Klärung der Aspekte, die mit der Erzeugung von σ-Algebren zusammenhängen, geht es nun um die Konstruktion von Maßen in Produktalgebren. Sind μ_i Maße auf $\mathcal{A}_i$, $i=1,2$, so sollte ein Produktmaß $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ sinnvollerweise folgende Eigenschaft haben:

$$\mu_1 \otimes \mu_2 \,(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2).$$

Dies wird unsere Konstruktion leisten.
Wir beginnen mit Funktionen folgender Bauart:



$$\boxed{x_1 \mapsto \mu_2(A_{x_1})}$$

Zeigen deren Meßbarkeit

<u>Satz 1.66</u> Es seien $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$, $i=1,2$, σ-endliche Maßräume und $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Dann sind die Funktionen

$$x_1 \mapsto \mu_2(A_{x_1}) \quad , \ \Omega_1 \to [0,\infty]$$
$$x_2 \mapsto \mu_1(A_{x_2}) \quad , \ \Omega_2 \to [0,\infty],$$

meßbar.

<u>Beweis:</u> Wir zeigen das für die Funktion $x_1 \mapsto \mu_2(A_{x_1}) =: s_A(x_1)$.

(i) Zuerst <u>vereinfachende Annahme</u>: $\mu_2(\Omega_2) < \infty$.

Wir definieren

$$\mathcal{D} := \{ A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \ : \ s_A \text{ ist } \mathcal{A}_1\text{-meßbar} \}.$$

- $\mathcal{D}$ ist ein Dynkin-System, was wir am Ende noch zeigen.
- Es gilt $A_1 \times A_2 \in \mathcal{D}$ für alle $A_i \in \mathcal{A}_i$, $i=1,2$, denn:

$$s_{A_1\times A_2}(x_1) = \mu_2\big(\underbrace{(A_1\times A_2)_{x_1}}_{\substack{A_2 \text{ falls } x_1\in A_1 \\ \emptyset \text{ sonst}}} \big) = \underbrace{\mu_2(A_2)}_{\substack{\text{const.} \\ \text{bzgl. } x_1}} \underbrace{\chi_{A_1}(x_1)}_{\text{meßbare Fkt.}}$$

Die Menge $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ ist durchschnittsstabil, deshalb umfasst $\mathcal{D}$ ein von einer $\cap$-stabilen Menge erzeugtes Dynkin-system $\hat{\mathcal{D}}$. Dieses ist nach Satz 1.28 bereits eine σ-Algebra. $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ wird von $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ erzeugt und deshalb gilt

$$\underbrace{\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2}_{\text{kleinste } \sigma\text{-A.}} \subset \underbrace{\hat{\mathcal{D}}}_{\text{eine } \sigma\text{-A.}} \subset \mathcal{D}.$$

Wegen $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ folgt

$$\mathcal{D} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 .$$

Damit ist S_A meßbar für <u>alle</u> $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.

(ii) <u>$\mu_2(\Omega_2) = \infty$:</u>

Wegen der σ-Endlichkeit gilt

$$\Omega_2 = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_2^{(i)} , \quad \Omega_2^{(i)} \text{ paarweise disjunkt}, \quad \mu_2(\Omega_2^{(i)}) < \infty \ \forall i .$$

$$\Rightarrow \quad S_A(x_1) = \mu_2(A_{x_1}) = \mu_2(A_{x_1} \cap \Omega_2) = \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\mu_2(A_{x_1} \cap \Omega_2^{(i)})}$$

alles meßbare Funktionen nach dem eben Bewiesenen.
$\Omega_2^{(i)}$ hat endl. Maß!
[Neue Grundmenge]

$\Rightarrow$ auch S_A meßbar.

(iii) <u>Nachreichen der Dynkin-Eigenschaft von $\mathcal{D}$</u>

Zu zeigen ist:

a) $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \in \mathcal{D}$

b) $A \in \mathcal{D} \Rightarrow {}^{c}A \in \mathcal{D}$

c) $A = \bigcup_{1}^{\infty} A^{(k)} \in \mathcal{D}$ falls alle $A^{(k)}$ paarw. disjunkt und aus $\mathcal{D}$ sind

<u>Zu a)</u> $S_{\Omega}(x_1) = \mu_2((\Omega_1 \times \Omega_2)_{x_1}) = \mu_2(\Omega_2)$ $\Rightarrow$ konstant
$\Rightarrow$ meßbar
$\Rightarrow \Omega \in \mathcal{D}$.

b) Beachten Sie, dass wir diese Annahme nur für $\mu_2(\Omega_2) < \infty$ brauchen!

Offenbar gilt $\quad \Omega_{x_1} = (\Omega \setminus A)_{x_1} \cup A_{x_1}$

$$\Rightarrow \quad S_\Omega(x_1) = \mu_2(\Omega_2) = \mu_2((\Omega\setminus A)_{x_1}) + \mu_2(A_{x_1})$$
$$= S_{\Omega\setminus A}(x_1) + S_A(x_1)$$

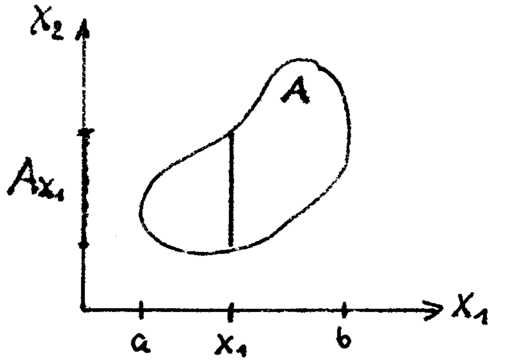
$$\Rightarrow \quad S_{\Omega\setminus A}(x_1) = \underbrace{\mu_2(\Omega_2)}_{\text{const}} - \underbrace{S_A(x_1)}_{\text{messbar}} \quad \Rightarrow S_{\Omega\setminus A} \text{ messbar.}$$

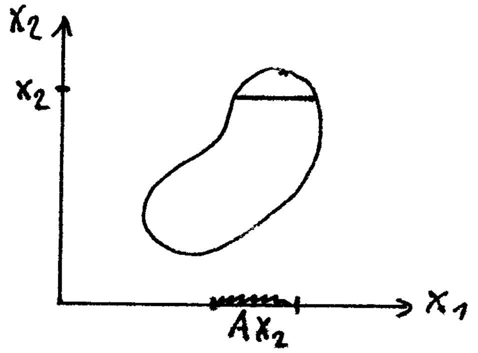
c) $$S_A(x_1) = \mu_2\Big(\big(\bigcup_k A^{(k)}\big)_{x_1}\Big) = \mu_2\Big(\bigcup_k A^{(k)}_{x_1}\Big)$$
$$\underset{\text{disj.}}{=} \sum_1^\infty \mu_2(A^{(k)}_{x_1}) = \sum_1^\infty S_{A^{(k)}}(x_1)$$

Alle $S_{A^{(k)}}$ sind messbar, folglich auch S_A als punktweiser Limes.

□

Wir verdeutlichen uns die Annahme für den $\mathbb{R}^2$.

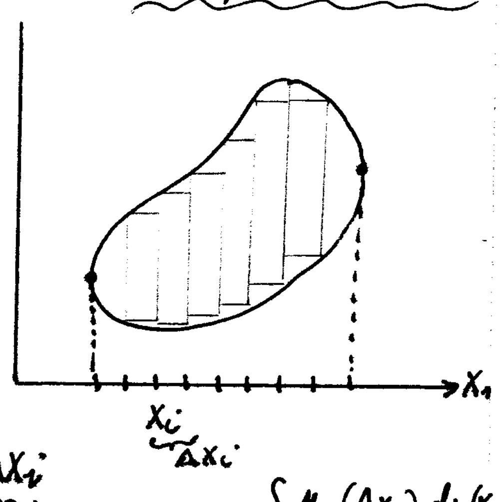




Links von a und rechts von b gilt $S_A(x_1) = 0$. Schieben wir x_1 von a nach b, dann ändert sich A_{x_1} und damit das Maß $\mu_2(A_{x_1}) = S_A(x_1)$. Aber diese Funktion ist messbar

Analoges gilt hier.

Prinzip von Cavalieri



Das Maß $\mu(A)$ könnte, wenn unsere Intuition richtig ist, wie folgt bestimmt werden (siehe rechte Skizze)

$$\mu(A) \approx \sum_i \underbrace{\mu_2(A_{x_i})}_{\text{Höhen}} \underbrace{\Delta x_i}_{\text{Breiten}} \longrightarrow \int \mu_2(A_{x_1})\, d\mu_1(x_1) \; ?$$