**Satz 1.67** Es gibt genau ein Maß $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ auf der $\sigma$-Algebra $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ mit der Eigenschaft

$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$$

für alle $A_i \in \mathcal{A}_i$, $i = 1,2$. Es ist gegeben durch

$$\boxed{(\mu_1 \otimes \mu_2)(A) = \int \mu_2(A_{x_1})\, d\mu_1(x_1) = \int \mu_1(A_{x_2})\, d\mu_2(x_2)}$$

Beweis: Die Mengen $A_1 \times A_2$ bilden ein durchschnittsstabiles Erzeugendensystem [und nach Voraussetzung soll unser Maß $\mu$ durch obige Produkteigenschaft festgelegt sein].
Nach Satz 1.28 ist das Maß auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ eindeutig bestimmt. Bleibt zu zeigen, dass obiges $\mu$ ein Maß ist und die Produkteigenschaft hat.

Produkteigenschaft Hat $A$ die Form $A_1 \times A_2$, dann

$$\int \mu_2(A_{x_1})\, d\mu_1(x_1) = \int \mu_2(A_{x_1})\, \chi_{A_1}(x_1)\, d\mu_1(x_1)$$

denn $A_{x_1} = \emptyset$ für $x_1 \notin A_1$

$$= \int \underbrace{\mu_2(A_2)}_{\text{const}}\, \chi_{A_1}(x_1)\, d\mu_1(x_1)$$

$$= \mu_2(A_2) \underbrace{\int \chi_{A_1}(x_1)\, d\mu_1(x_1)}_{= \mu_1(A_1)}$$

$$= \mu_1(A_1)\mu_2(A_2).$$

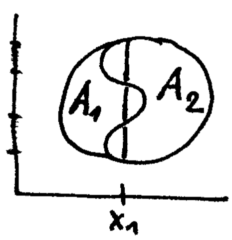
Analog das andere Integral!

$\mu_1 \otimes \mu_2$ ist Maß.

Wir zeigen die $\sigma$-Additivität. Sei dazu $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ mit

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A^{(k)}, \quad A^{(k)} \text{ paarweise disjunkt aus } \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$$

Dann sind auch die Schnitte $A^{(k)}_{x_1}$ disjunkt.




$$\Rightarrow \mu_2(A_{x_1}) = \mu_2\Big(\bigcup_1^{\infty} A^{(k)}_{x_1}\Big) = \sum_1^{\infty} \mu_2(A^{(k)}_{x_1}),$$

denn $\mu_2$ ist ein Maß.

$$\Rightarrow \mu(A) = \int \mu_2(A_{x_1})\, d\mu_1(x_1) = \int \sum_{k=1}^{\infty} \mu_2(A^{(k)}_{x_1})\, d\mu_1(x_1)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int \mu_2(A^{(k)}_{x_1})\, d\mu_1(x_1) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A^{(k)}) \qquad \square$$

Satz von B. Levi

Definition von $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$

Dieser Satz gibt uns ein wichtiges Werkzeug zur Berechnung von Inhalten mehrdimensionaler Körper. Bevor wir dazu kommen, ist noch eine Vereinbarung zur Bezeichnungsweise nötig.

<u>Bezeichnungen</u>

| |
|---|
| $\lambda^d$: Lebesgue-Maß im Raum $\mathbb{R}^d$ |
| $dx := d\lambda^1(x)$; analog $dy := d\lambda^1(y)$ etc. |

Diese Schreibweise bietet sich an, da das Regelintegral mit dem Lebesgue-Integral übereinstimmt. Sie erleichtert das Umgehen mit Integralen.

Wir leiten zuerst das

<u>Prinzip von Cavalieri:</u>

„Liegen zwei Körper zwischen zwei parallelen Ebenen $E_1, E_2$ und werden sie von jeder dazu parallelen Ebene $E$ so geschnitten, dass gleich große Schnittflächen entstehen, so haben die Körper das gleiche Volumen"


Man denke an einen verschobenen Stapel von Eurostücken

Dieses Prinzip folgt aus dem letzten Satz: Ist $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$ eine Borelmenge, dann gilt

$$\lambda^{n+m}(A) = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} \chi(A)\, d\lambda^{n+m} \quad \left( = \int_A d\lambda^{n+m} \right)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} \lambda^n(A_x)\, d\lambda^m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda^m(A_y)\, d\lambda^n(y)$$

(Beachte: $\lambda^{n+m} = \lambda^n \otimes \lambda^m$).

$x \in \mathbb{R}^m$

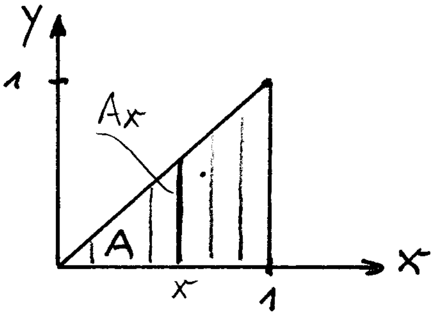
$y \in \mathbb{R}^n$

Mit unserer vereinbarten alternativen Schreibweise lässt sich das so:

$$\boxed{\lambda^{n+m}(A) = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda^n(A_x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda^m(A_y)\,dy}$$

__Beispiele 1.68__

(i) Flächeninhalt eines Dreiecks (nur zur Illustration)




$$\lambda^2(A) = \int_{\mathbb{R}} \lambda^1(A_x)\,dx$$

$$= \int_0^1 \lambda^1(A_x)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$

Analog hätten wir A "in horizontale Streifen zerlegen können" und $\int_0^1 y\,dy = 1/2$ nehmen können.

(ii) __Volumen der n-dimensionalen Kugel__

Wir betrachten die Kugel $\mathcal{B}^n(x_0,R) \subset \mathbb{R}^n$ vom Radius $R$ um $x_0$. Wegen Translationsinvarianz und Folgerung 1.31, (iii) gilt

$$\lambda^n(\mathcal{B}^n(x_0,R)) = R^n\,\lambda^n(\mathcal{B}^n(0,1)),$$

so dass wir nur das Volumen der Einheitskugel berechnen müssen, das wir mit $\omega_n$ bezeichnen:

$$\underline{\omega_n := \lambda^n(\mathcal{B}^n(0,1)).}$$

Für $n=1$ folgt

$$\omega_1 = \lambda^1(\mathcal{B}^1(0,1)) = \lambda^1(]-1,1[) = \lambda^1([-1,1]) = 2$$

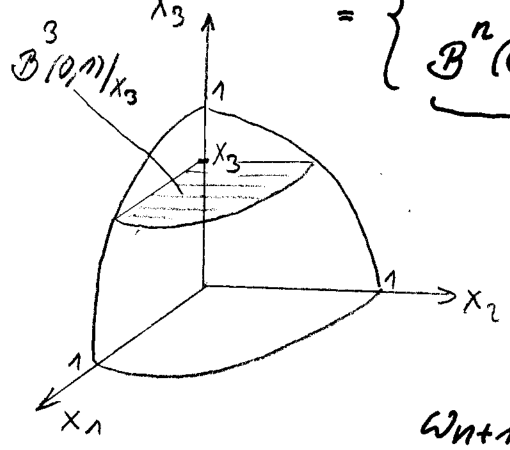
Weiter folgt

$$\omega_{n+1} = \lambda^{n+1}(\mathcal{B}^{n+1}(0,1)) = \lambda^n \otimes \lambda^1(\mathcal{B}^{n+1}(0,1))$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \lambda^n(\mathcal{B}^{n+1}(0,1)_{x_{n+1}})\,dx_{n+1}$$

Für die Schnittmenge $\mathcal{B}^{n+1}(0,1)_{x_{n+1}}$ erhalten wir

$$\mathcal{B}^{n+1}(0,1)_{x_{n+1}} = \{(x_1,\dots,x_n) : x_1^2+\dots+x_n^2+x_{n+1}^2<1\}$$
$$= \{ \text{ -- '' -- } : x_1^2+\dots+x_n^2 < 1-x_{n+1}^2\}$$
$$= \begin{cases} \emptyset & |x_{n+1}|\ge 1 \\ \underbrace{\mathcal{B}^n(0,\sqrt{1-x_{n+1}^2})}_{=\left(\sqrt{1-x_{n+1}^2}\right)^n \omega_n}, & |x_{n+1}|<1 \end{cases}$$




Somit folgt mit $x := x_{n+1}$

$$\omega_{n+1} = \omega_n \int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^n dx \quad , n=1,2,\dots$$

Für $n=1$: $\omega_2 = 2\cdot$ Fläche des Halbkreises $=\pi$ (Flächeninhalt des Einheitskreises).

Nach Substitution $x=\cos t$

$$\omega_{n+1} = \omega_n \underbrace{\int_0^{\pi}(\sin t)^{n+1}dt}_{=:\,c_n} \,.$$

$c_n$ für $(n\ge -1)$

Für $c_n$ finden wir eine Rekursionsformel:

$$c_{n+2} = \int_0^{\pi}(\sin(t))^{n+2}\sin t\, dt$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{part. Integr.}}}{=} (n+2)\int_0^{\pi}(\sin t)^{n+1}\cos^2 t\, dt$$

$$= (n+2)c_n - (n+2)c_{n+2} \qquad (\text{wegen } \cos^2 = 1-\sin^2)$$

$$\Rightarrow \quad c_{n+2} = \frac{n+2}{n+3}c_n \quad , n\ge -1.$$

Mit $c_{-1}=\pi$, $c_0=2$ folgt (warum?)

$$c_n c_{n-1} = \frac{2\pi}{n+1} \quad , n\ge 0$$

HA

Daraus ergibt sich mit (*), (**), (+) nach etwas Rechnung

$$\omega_{2n} = \frac{\pi^n}{n!} \qquad \text{(gerade Dimensionen)}$$

$$\omega_{2n+1} = \left( \prod_{k=0}^{n} \frac{2}{k+1} \right) \pi^n \qquad \text{(ungerade Dim.)}$$

Spezialfall $d=3$:

$$\omega_3 = \frac{4}{3}\pi$$

Bis jetzt haben wir mehrdimensionale Inhalte ausgerechnet, Grundlage ist die Beziehung

$$\mu(A) = \int_A d\mu = \int \chi_A \, d\mu$$

gewesen. Nun interessiert uns ein ähnliches Konzept für Funktionen. Dabei beginnen wir wieder mit nichtnegativen.

Satz 1.69 (Tonelli) Es seien $(\mathfrak{X}_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$, $i=1,2$, $\sigma$-endl. Maßräume und $f: \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2 \to [0,\infty]$ eine $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$-meßbare Funktion. Dann sind meßbar

$$f_{x_2} : \mathfrak{X}_1 \to [0,\infty]: \quad x_1 \mapsto f(x_1,x_2) \qquad \forall x_2 \in \mathfrak{X}_2$$

$$f_{x_1} : \mathfrak{X}_2 \to [0,\infty]: \quad x_2 \mapsto f(x_1,x_2) \qquad \forall x_1 \in \mathfrak{X}_1$$

sowie

$$x_1 \mapsto \int f_{x_1} \, d\mu_2$$

$$x_2 \mapsto \int f_{x_2} \, d\mu_1 .$$

Außerdem gilt

$$\int f \, d\mu_1 \otimes \mu_2 = \int \left( \int f_{x_1} \, d\mu_2 \right) d\mu_1 = \int \left( \int f_{x_2} \, d\mu_1 \right) d\mu_2 .$$

Bemerkung: Die letzte Beziehung schreibt man gern auch so auf:

$$\int f(x,y) \, d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x,y) = \int \left( \int f(x,y) \, d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) \quad \leftarrow \text{iterierte}$$

$$= \int \left( \int f(x,y) \, d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y) \quad \swarrow \text{Integrale}$$

<u>Beweis</u>: (i) Betrachten zunächst eine Elementarfunktion

$$f = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \chi_{A^{(k)}}$$

mit $\alpha_k \geq 0$ und $A^{(k)} \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Es gilt für alle $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$

$$(\chi_A)_{x_i} = \chi_{A_{x_i}} \qquad i = 1,2$$

"Schnittfkt der char. Fkt = char. Fkt. der Schnittmenge".

Wir wissen, dass die Schnitte $A_{x_i}$ messbar sind (Satz 1.65), folglich auch

$$f_{x_i} = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \left(\chi_{A^{(k)}}\right)_{x_i} = \sum_{1}^{r} \alpha_k \chi_{A^{(k)}_{x_i}}.$$

Die Messbarkeit der Funktionen

$$x_i \mapsto \int f_{x_i}\, d\mu_j$$

folgt aus Satz 1.66, z.B. gilt

$$\int \underbrace{f(x_1, x_2)}_{f_{x_1}}\, d\mu_2(x_2) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \int \chi_{A^{(k)}_{x_1}}\, d\mu_2 = \sum_{1}^{r} \alpha_k \underbrace{\mu_2(A^{(k)}_{x_1})}_{\text{messbar nach Satz 1.66.}}.$$

Die letzte Beziehung für die iterierten Integrale folgt direkt aus der in Satz 1.67 angegebenen Formel für $\mu_1 \otimes \mu_2$.

(ii) Nun sei $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to [0,\infty]$ beliebig messbar. Dann existiert eine monotone Folge von Elementarfunktionen $f_n$ mit

$$f_n(x_1, x_2) \uparrow f(x_1, x_2) \qquad \forall (x_1, x_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2.$$

Klar ist, dass dann auch die Schnittfunktionen entsprechend monoton konvergieren, d.h.

$$(f_n)_{x_i} \uparrow f_{x_i} \quad \text{f.ü.} \qquad i = 1,2.$$

Damit auch

$$\underbrace{\int (f_n)_{x_i}\, d\mu_j}_{\text{messbar } \forall n} \uparrow \underbrace{\int f_{x_i}\, d\mu_j}_{\Rightarrow \text{ messbar (bezügl. der anderen Variablen).}}$$

Wegen (i) gilt

$$\int f_n(x,y)\, d\mu_1\otimes\mu_2 = \int\left(\int f_{n,x}\, d\mu_2\right) d\mu_1 = \int\left(\int f_{n,y}\, d\mu_1\right) d\mu_2$$

für alle $n$.

Also gilt dies auch für $\lim_{n\to\infty}\ldots$, und nach dem Satz über die monotone Konvergenz können wir Integration und Grenzübergang vertauschen, so dass am Ende die gewünschten Beziehungen dastehen. $\square$

<u>Bemerkung</u> Im Satz wurde nicht vorausgesetzt, dass $f$ oder eine der Schnittfunktionen integrierbar ist. Es kann also durchaus sein, dass in der letzten Beziehung überall $+\infty$ steht. Ist aber nur eines der Integrale endlich, dann sind es die anderen auch.

<u>Beispiel 1.70</u>

Zu berechnen ist

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx .$$

Dieses Integral kommt bei der Gaußschen Fehlerfunktion vor, aber leider findet man keine elementare Stammfunktion zu $e^{-x^2}$. Wir gehen einen Umweg über 2-dimensionale Integration.

Die Funktion $e^{-x^2}$ ist integrierbar, denn:

$$e^{-x^2} \leq \underbrace{\min(1, x^{-2})}_{g}$$

und die Funktion $g$ ist integrierbar wie man leicht nachprüft (die rechte Funktion ist regel-integrierbar!)

$$\Rightarrow \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \int e^{-x^2}\, d\lambda^1(x) < \infty .$$

$$= \int e^{-x^2}\, dx \quad \text{(unsere neue Schreibweise)}$$

Nach dem Satz von Tonelli gilt nun

$$\int\left(\int e^{-x^2} e^{-y^2}\, dy\right) dx = \iint e^{-(x^2+y^2)}\, d\lambda^2(x,y).$$

Für das erste, letztere, [illegible] rechnen wir

$$\int\left(\int e^{-x^2} e^{-y^2}\, dy\right) dx = \int e^{-x^2} \underbrace{\left(\int e^{-y^2}\, dy\right)}_{= \text{const} < \infty} dx$$

$$= \Big(\underbrace{\int e^{-y^2}\, dy}_{= I}\Big)\Big(\underbrace{\int e^{-x^2}\, dx}_{= I}\Big) = I^2 < \infty .$$

<u>Folgerung</u>: Die Funktion $f$,

$$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$$

ist integrierbar und

$$I^2 = \iint e^{-(x^2+y^2)}\, d\lambda^2(x,y).$$

Das rechts stehende Integral rechnen wir später durch Transformation auf Polarkoordinaten aus und erhalten den Wert $\pi$.

$$\Rightarrow I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

Wir verzichten nun auf die Nichtnegativität der Funktionen und kommen nun zu

<u>Satz 1.71</u> (<u>Fubini</u>) Zusätzlich zu den Voraussetzungen des Satzes von Tonelli sei die Funktion $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ (auf $f \geq 0$ wird also verzichtet) bezüglich des Produktmaßes $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ integrierbar. Dann sind die Schnittfunktionen $f_{x_2} : \Omega_1 \to \mathbb{R}$, $f_{x_1} : \Omega_2 \to \mathbb{R}$ für $\mu_2$-fast alle $x_2$ bzw. $\mu_1$-fast alle $x_1$ integrierbar.
Die auf diese Weise fast überall definierten Funktionen $g_1, g_2$,

$$g_1(x_1) = \int f_{x_1}\, d\mu_2 , \quad g_2(x_2) = \int f_{x_2}\, d\mu_1$$

sind integrierbar (auf $\Omega_1$ bzw. $\Omega_2$) und es gilt

$$\int g_1\, d\mu_1 = \int g_2\, d\mu_2 = \int f\, d\mu_1 \otimes \mu_2 .$$

Beweis: Klar ist $|f|_{x_i} = |f_{x_i}|$, $(f^+)_{x_i} = (f_{x_i})^+$, analog für $f^-$.
Tonelli $\Rightarrow$

$$\int\left(\int |f_{x_1}|\, d\mu_2\right) d\mu_1 = \int\left(\int |f|_{x_1}\, d\mu_2\right) d\mu_1$$

$$= \int |f|\, \underbrace{d\mu_1\otimes\mu_2}_{\mu} < \infty \qquad (*)$$

da $f$ integrierbar ist!

$\Rightarrow \int |f(x_1,x_2)|\, d\mu_2(x_2) < \infty$ für fast alle $x_1$, d.h. für alle außerhalb einer Nullmenge $N_1$.
$\left(= \int |f|_{x_1}\, d\mu_2\right)$

Für alle $x_1 \in \Omega_1 \setminus N_1$ ist also die Funktion

$$x_2 \mapsto f(x_1,x_2)$$

integrierbar.
Nach Def. des Lebesgue-Integrals für Funktionen mit beliebigem Vorzeichen gilt für die im Satz definierte Funktion $g_1$,

$$g_1(x_1) = \int f^+(x_1,x_2)\, d\mu_2(x_2) - \int f^-(x_1,x_2)\, d\mu_2(x_2)$$

$(x_1 \in \Omega_1 \setminus N_1)$.
Nach dem Satz von Tonelli ist die Abb. $x_1 \mapsto \int f^+(x_1,x_2)\, d\mu_2$ meßbar und wegen $(*)$ sogar integrierbar. Dabei gilt

$$\int\left(\int f^+(x_1,x_2)\, d\mu_2\right) d\mu_1 = \int\left(\int f^+(x_1,x_2)\, d\mu_1\right) d\mu_2 = \int f^+\, d\mu.$$

Gleiches gilt für $f^-$. Subtraktion $\Rightarrow$
$\Rightarrow g_1$ ist integrierbar und

$$\int g_1\, d\mu_1 = \int\left(\int f^+(x_1,x_2)\, d\mu_2\right) d\mu_1 - \int\left(\int f^-(x_1,x_2)\, d\mu_2\right) d\mu_1$$

$$= \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu = \int f\, d\mu.$$

Das ist aber gerade die letzte Aussage des Satzes von Fubini wegen Symmetrie in den Rollen von $\mu_1, \mu_2$. $\square$

**Beispiel:** Volumenberechnung "unter Graphen"

**Satz 1.72** $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei nichtnegativ und integrierbar und

$$G := \{(x_1,\dots,x_{n+1}) : 0 \le x_{n+1} \le f(x_1,\dots,x_n)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

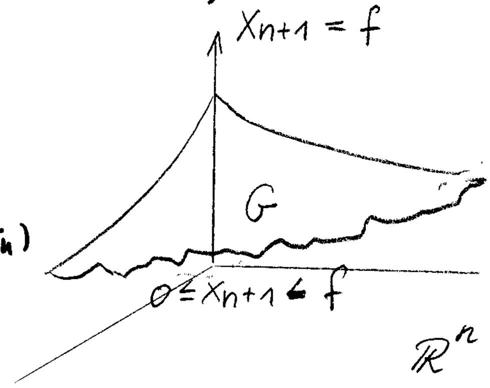
die Menge unter dem Graphen von $f$. Es gilt

$$f \in L_1(\lambda^n) \Leftrightarrow \chi_G \in L_1(\lambda^{n+1}).$$

Daher hat $G$ endliches Maß und

$$\lambda^{n+1}(G) = \int f \, d\lambda^n.$$

**Beweis:** Wir gehen vor wie im Skript von D. Ferus, aus dem dieser Satz übernommen ist.




Betrachten

$$\lambda^{n+1} = \lambda^n \otimes \lambda^1$$

$$\chi_G(x_1,\dots,x_{n+1}) = \begin{cases} 1, & 0 \le x_{n+1} \le f(x_1,\dots,x_n) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \chi_{[0, f(x_1,\dots,x_n)]}(x_{n+1}).$$

Klar ist

$$\int \chi_{[0, f(x_1,\dots,x_n)]} \, d\lambda^1 = \lambda^1([0, f(x_1,\dots,x_n)]) = f(x_1,\dots,x_n).$$

$$\Rightarrow \lambda^{n+1}(G) = \int \chi_G \, d\lambda^{n+1} = \int \left( \int \chi_G \, d\lambda^1 \right) d\lambda^n$$

$$= \int f \, d\lambda^n < \infty$$

falls $\chi_G \in L_1(\lambda^{n+1})$ (wegen Satz von Fubini). Gilt umgekehrt $f \in L_1(\lambda^n)$, dann gilt $\int f \, d\lambda^n < \infty$.

Mit $f$ ist auch

$$g(x_1,\dots,x_{n+1}) = x_{n+1}\,(f(x_1,\dots,x_n) - x_{n+1})$$
$$= x_{n+1} f - x_{n+1}^2$$

meßbar, wie man zeigt. Und es gilt

$$G = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : g(x) \geq 0\}$$

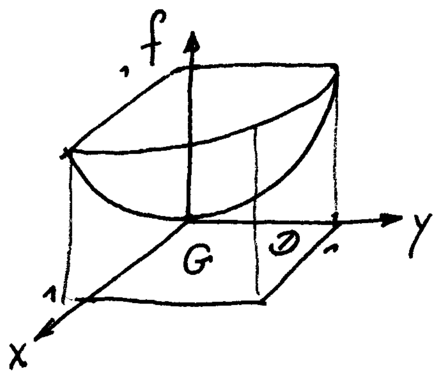
(man beachte insbesondere die untere Begrenzung von $G$...)

$\Rightarrow$ $G$ ist messbar $\Rightarrow$ $\chi_G$ messbar. Nach dem Satz von Tonelli folgt

$$\int \chi_G \, d\lambda^{n+1} = \int f \, d\lambda^n < \infty,$$

somit $\chi_G \in L_1(\lambda^{n+1})$ $\square$

<u>Beispiel</u> Volumen des Körpers im $\mathbb{R}^3$, begrenzt durch Graph von $f(x,y,z) = x^2+y^2$ nach oben und $[0,1]\times[0,1]\times\{0\}$ nach unten.




Wir können $f$ durch Null auf ganz $\mathbb{R}^2$ fortsetzen

$$D = [0,1]^2, \quad f = \begin{cases} 0 & \binom{x}{y} \notin D \\ \left\|\binom{x}{y}\right\|^2, & \binom{x}{y} \in D \end{cases}$$

Damit

$$V = \int \chi_G \, d\lambda^3 = \int f \, d\lambda^2 = \int \left( \int f(x,y) \, d\lambda^1(y) \right) d\lambda^1(x)$$

$$(= \lambda^3(G)) \qquad = \int_0^1 \left( \int_0^1 (x^2+y^2) \, dy \right) dx$$

zu empfehlen fürs Rechnen $\rightarrow$ $= \int_{x=0}^1 \left( \int_{y=0}^1 (x^2+y^2) \, dy \right) dx$

$$= \int_{x=0}^1 \left[ yx^2 + \frac{y^3}{3} \right]_0^1 dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{3}\right) dx = \frac{2}{3}.$$

Dabei wurde angewendet: $f \in L_1(\lambda^2)$ (z.B. $|f| \leq 1$ auf $D$, Null sonst)

$\Rightarrow$ Fubini anwendbar

$\Rightarrow$ Berechnung über iterierte Integrale war gestattet.