

2. Der Transformationsatz

Worum geht es in diesem Kapitel? Für die Berechnung von Integralen wendet man oft Koordinatentransformationen an. Die Frage ist dann, wie sich die Integrale unter Transformationen verhalten.

Wir werden jetzt generell im Raum \mathbb{R}^n arbeiten. Für $n=1$ kennen Sie die Transformationsformel schon, das ist die Substitutionsregel. Gegeben sei das Integral $\int_a^b f(x) dx$. Wir führen "neue Koordinaten" t ein durch

$$x = \phi(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} a &= \phi(\alpha) \\ b &= \phi(\beta). \end{aligned}$$

Unter entsprechenden Voraussetzungen gilt dann:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(\phi(t)) \phi'(t) dt. \quad (*)$$

Im \mathbb{R}^2 werden oft Polarkoordinaten verwendet, um Integrale über kreisförmig bewandete Gebiete auszurechnen.

Zu berechnen sei z.B.

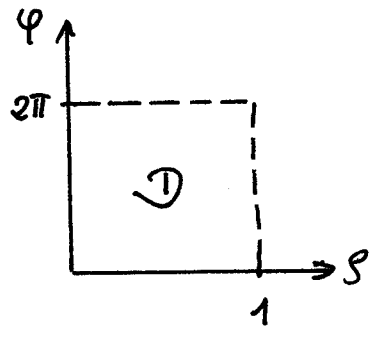
$$\int_{\mathbb{B}(0,1)} f d\lambda^2 = \int \chi_{\mathbb{B}(0,1)} f d\lambda^2$$

über den Einheitskreis. Hier setzt man

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho \cos \varphi & 0 \leq \rho \leq 1 \\ x_2 &= \rho \sin \varphi & 0 \leq \varphi < 2\pi \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \phi(\rho, \varphi) := \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \end{pmatrix}; \quad \phi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{B}(0,1)$$

Der Einheitskreis ist dann das Bild der offenen $\mathbb{D} = [0,1[\times [0,2\pi[$



Der Vorteil: \mathbb{D} ist ein Rechteck, wo wir gut mit iterierten Integralen arbeiten können (Satz von Fubini!).

Frage: Was ist das Analogon zu (*)?

2.1. Bilder messbarer Mengen

Lemma 2.1 Die Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ seien offen, $f: U \rightarrow V$ stetig.
Dann ist das Urbild $f^{-1}(B) \subset U$ für jede Borelmengen $B \subset V$ wieder eine Borelmenge.

Beweis: Setzen $\mathcal{A} := \{B \subset \mathbb{R}^n : f^{-1}(B \cap V) \text{ ist Borelmenge}\}.$

(i) \mathcal{A} enthält alle offenen Mengen:

B offen $\Rightarrow B \cap V$ offen $\Rightarrow f^{-1}(B \cap V)$ offen in $U \Rightarrow$ auch in \mathbb{R}^n
Stetig. U offen

Damit ist aber $f^{-1}(B \cap V)$ Borelmenge, denn alle offenen Mengen sind das.

(ii) Beweis der Aussage des Satzes: \mathcal{A} ist σ -Algebra, denn:

$$\bullet f^{-1}((A \setminus B) \cap V) = f^{-1}(A \cap V) \setminus f^{-1}(B \cap V)$$

Damit: $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$

$$\bullet f^{-1}\left(\bigcup_{\substack{1 \\ \infty}} A_k \cap V\right) = \bigcup_{\substack{1 \\ \infty}} f^{-1}(A_k \cap V)$$

Somit: $A_k \in \mathcal{A}, k=1, 2, \dots \Rightarrow \bigcup_{\substack{1 \\ \infty}} A_k \in \mathcal{A}.$

Folgerung: \mathcal{A} umfasst alle offenen Mengen und ist σ -Algebra.

Die σ -Algebra der Borelmengen wird durch die offenen Mengen erzeugt, wie wir wissen (das war eine Übungsaufgabe).

Damit umfasst \mathcal{A} diese Algebra und damit alle Borelmengen. \square

Lemma 2.2 $U, V \subset \mathbb{R}^n$ seien offen und $\phi: U \rightarrow V$ eine stetig differenzierbare Bijektion mit $\det \phi'(x) \neq 0$ für alle $x \in U$.

Dann ist das Bild $\phi(A)$ jeder Borelmenge $A \subset U$ wieder eine Borelmenge.

Beweis: Die Voraussetzungen des Umkehrsatzes sind erfüllt (Kurs Analysis II). Damit ist ϕ in einer Umgebung jedes Bildpunktes $y \in \phi(A)$ umkehrbar und ϕ^{-1} ist dort stetig.

$\Rightarrow \phi^{-1}$ ist stetig auf ganz $\phi(A)$. Setze

$$\psi := \phi^{-1} \Rightarrow \phi = \psi^{-1}$$

Nach dem letzten Lemma bildet ψ^{-1} Borelmengen auf Borelmengen ab, also gilt Gleiches für ϕ . \square

Satz 2.3. (Lemma von Sard) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, und

$$S := \{x \in U : \det \phi'(x) = 0\}.$$

Dann ist das Bild $\phi(S)$ eine Borelmenge vom Maß Null.

Beweis: (i) Zeigen die Aussage zuerst für $\phi(S \cap Q)$, wobei Q : abgeschlossener Würfel mit Kantenlänge d ist.

Gebe $\varepsilon > 0$ vor, überdecke Q durch N^n abgeschl. W_j mit Kantenlänge d/N .

ϕ' ist gleichmäßig stetig auf Q , daher existiert ein N , so dass

$$\|\phi'(y) - \phi'(x)\| \leq \varepsilon \quad \forall x, y \in W_j; \quad \forall j$$

Schrankensatz, angewendet auf

$$g(y) := \phi(y) - \phi'(x)y$$

ergibt

$$\begin{aligned} \|g(y) - g(x)\|_2 &\leq \sup_{\xi \in \overline{yx}} \|g'(\xi)\| \|x - y\|_2 \\ &= \sup_{\xi \in \overline{yx}} \underbrace{\|\phi'(\xi) - \phi'(x)\|}_{\leq \varepsilon \quad \forall \xi, x \in W_j} \|x - y\|_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|\phi(y) - \phi(x) - \phi'(x)(y-x)\|_2 \leq \varepsilon \|x - y\|_2 \leq \varepsilon \sqrt{n} \frac{d}{N} \quad (*)$$

für alle x, y aus dem gleichen Würfel W_j .

Da Q kompakt ist, ist wegen des Schrankensatzes ϕ auch Lipschitzstetig auf Q , d.h. $\exists L > 0$:

$$\|\phi(y) - \phi(x)\|_2 \leq L \|y - x\|_2 \leq L \sqrt{n} \frac{d}{N} \quad (**)$$

$\forall x, y \in W_j$.

$\|\cdot\| :=$
 $\|\cdot\|_2$
(Euklid.)

b.w.

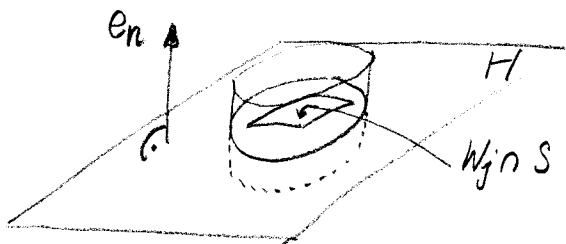
(*) , umgeschrieben \Rightarrow

$$\| \{ \phi(x) + \phi'(x)(y-x) \} - \phi(y) \|_2 \leq \varepsilon \sqrt{n} \frac{d}{N} .$$

Gilt $W_j \cap S \neq \emptyset$, dann kann man $x \in S$ wählen, also $\det \phi'(x) = 0$. Deshalb liegen alle Vektoren $\{ \dots \}$ in einer Hyperebene H . Wir dürfen annehmen

$$H = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\},$$

so dass der Normalenvektor von H gerade der Einheitsvektor e_n ist [Begründung am Ende des Beweises].



Unser gewähltes $x \in S$ bleibt fest, betrachten (*) für variables $y \in W_j$:

$$(*) \Rightarrow \| \phi(y) - \underbrace{\{ \dots \}}_{\in H} \|_2 \leq \varepsilon \sqrt{n} \frac{d}{N}$$

$$\Rightarrow | \phi(y)_{n+1} - \{ \dots \}_{n+1} | \leq \varepsilon \sqrt{n} \frac{d}{N} .$$

Auch wenn $\{ \dots \}_{n+1}$ von y abhängt, so liegt $\{ \dots \}$ doch in H .

(**) $\Rightarrow \phi(y)$ liegt in einer $(n-1)$ -dim. Kugel um $\phi(x)$ mit Radius $L \sqrt{n} \frac{d}{N}$.

\Rightarrow (siehe auch das Bild): $\phi(y)$ liegt in einem Zylinder des \mathbb{R}^n mit der $(n-1)$ -dim. Kugel als Basis und Höhe $\varepsilon \sqrt{n} \frac{d}{N}$.

Das gilt für alle $y \in W_j$, somit

$$\lambda^n(\phi(W_j)) \leq c \varepsilon \left(\frac{d}{N} \right)^n,$$

wobei c nur von L und der (festen) Raumdimension n abhängt. Für das Volumen von $\phi(Q \cap S)$ gilt deshalb

$$\lambda^n(\phi(Q \cap S)) \leq \sum_{j=1}^{N^n} \lambda^n(\phi(W_j \cap S)) \leq N^n c \varepsilon \left(\frac{d}{N} \right)^n = \underline{\underline{\varepsilon c d^n}} .$$

Beliebigkeit von $\varepsilon \Rightarrow \lambda^n(\phi(Q \cap S)) = 0$.

(ii) Übergang zu \mathcal{U} : \mathcal{U} lässt sich darstellen ("ausschöpfen") als

$$\mathcal{U} = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k, \quad Q_k: \text{abgeschlossene Kugel aus } \mathcal{U}.$$

(siehe z.B. Skript Fernus, Abs. III "Ausschöpfungslemma").

$$\Rightarrow \phi(S) = \phi\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (Q_k \cap S)\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \phi(Q_k \cap S) = \text{abschließ.}$$

(Überlappungen spielen hier keine Rolle)

Vereinigung von Nullmengen.

$$\Rightarrow \lambda^n(\phi(S)) = 0.$$

(iii) Darstellung der Hyperebene: Wir verwenden ein Argument aus dem Fernus-Skript:

- Wir wenden eine Drehung des \mathbb{R}^n durch eine orthogonale Transformation T an (die erhält die Euklid. Norm), so dass

$$\left((T \circ \phi)'(x)\right)(\mathbb{R}^n) = \underset{\substack{\uparrow \\ T \text{ linear}}}{(T \circ \phi)'(x)}(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}.$$

- $(T \circ \phi)'$ hat die gleiche Norm wie ϕ' , also bleiben unsere Abschätzungen $(*)$, $(**)$ gültig.
- Wir arbeiten nun mit $\tilde{\phi} := T \circ \phi$ und erhalten die Aussagen für $\tilde{\phi}$.

Ist $(T \circ \phi)'$ in einer Menge A_j vom Maß $\lambda^n(A_j)$ enthalten,

so gilt $\phi(W_j) \subset T^{-1}(A_j)$ und (das zeigen wir noch)
später ohne Bezug auf Sard

$$\begin{aligned} \lambda^n(T^{-1}(A_j)) &= \underbrace{|\det T^{-1}|}_{=1} \lambda^n(A_j) \\ &= \lambda^n(A_j) \end{aligned}$$

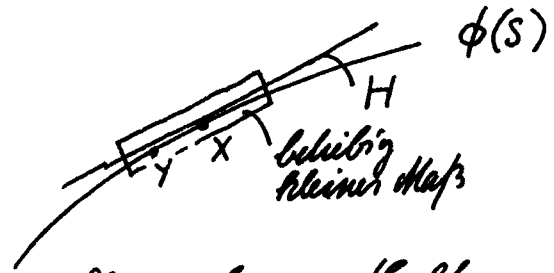
Nullmengen transformieren sich also zu Nullmengen und damit ändert diese Transformation nichts Wesentliches



Grundidee des Beweises: $x \in S \Rightarrow \det \phi'(x) = 0;$

$$\phi(y) \approx \underbrace{\phi(x) + \phi'(x)(y-x)}$$

enthalten in
einer Hyperebene H



$\Rightarrow \phi(y)$ ist lokal, nahe bei x ,
in einer Menge beliebig nahe zur Hyperebene enthalten.
Die Hyperebene hat als $(n-1)$ -dim. Teilraum von \mathbb{R}^n das
Maß Null, weshalb die $\phi(y)$ enthaltende Menge "sehr klein"
ist. Den Rest erledigt eine Überdeckung von S durch solche
"kleinen" Mengen.

2.2. Bilder linearer Transformationen

Wir untersuchen die Frage, wie Mengen durch lineare Trans-
formationen "verzerrt" werden und nach welchem Gesetz
sich ihre Volumina ändern.

Betrachten diese Volumenverzerrung für (lineare) Iso-
morphismen $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Jeder Isomorphismus des \mathbb{R}^n in sich ist das Produkt endlich
vieler elementarer Isomorphismen.

Def 2.4 Ein Isomorphismus $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt elementar, wenn
er von einem der 3 folgenden Typen ist:

(i) T multipliziert eine Komponente mit $\lambda \neq 0$ aus \mathbb{R}

(ii) T vertauscht zwei Komponenten

(iii) $T(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + x_2, x_2, \dots, x_n)$

b.w.

Lemma 2.5 (Verzerrung durch lineare Isomorphismen)

Für alle linearen Isomorphismen $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und
alle Borelmengen $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$\lambda^n(T(A)) = |\det T| \lambda^n(A)$$

Beweis (i) Ist D nichtsinguläre Diagonalmatrix und $q \in \mathbb{R}^n$ fest, dann

$$\lambda^n(\{Dx+q : x \in A\}) = |\det D| \lambda^n(A)$$

Dann: Lemma 2.2. $\Rightarrow \{Dx+q : x \in A\}$ ist Borelmenge, dies wird messbar und man sieht ein, dass

$$\begin{aligned} \mu_1(A) &= \lambda^n(\{Dx+q, x \in A\}) \\ \mu_2(A) &= |\det D| \lambda^n(A) \end{aligned}$$

Maße sind. Beide sind gleich auf der Menge der achsenparallelen Quader, denn die Translation verändert das Maß nicht und die Abb. $x \mapsto Dx$ verändert offenbar das Volumen durch $|\det D| \lambda^n(Q)$ für Quader Q .

(ii) Durch Permutationen der Koordinaten, $P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ändert sich das Volumen nicht, also

$$\lambda^n(P(A)) = \lambda^n(A) = 1 \cdot \lambda^n(A) = |\det P| \lambda^n(A).$$

(iii) Für Transformationen des Typs (iii) aus Def. 2.4. gilt die behauptete Formel ebenfalls, denn:
 Q sei achsenparalleler Quader,

$$\begin{aligned} \lambda^n(T(Q)) &= \int \chi_{T(Q)} d\lambda^n(x) \\ &= \int \chi_Q(T^{-1}x) d\lambda^n(x) \quad \left\{ \begin{array}{l} \chi_{T(Q)}(x) = 1 \Leftrightarrow x = Ty, y \in Q \\ y = T^{-1}(x) \in Q \end{array} \right. \\ &= \int \chi_Q(x_1 - x_2, x_2, \dots, x_n) d\lambda^n(x) \end{aligned}$$

Tonelli $\rightarrow = \int \left(\int \chi_Q(x_1 - x_2, x_2, \dots, x_n) d\lambda^{n-1}(x_2, \dots, x_n) \right) d\lambda^1(x_1)$

Translationsinvarianz $\rightarrow = \int \left(\int \chi_Q(x_1, x_2, \dots, x_n) d\lambda^{n-1}(x_2, \dots, x_n) \right) d\lambda^1(x_1)$

Tonelli $\rightarrow = \int \chi_Q d\lambda^n = \lambda^n(Q) = |\det(T)| \lambda^n(Q)$.

Aus (i)-(iii) und dem Fakt, dass sich jeder lineare Isomorphismus als Produkt elementarer Isomorphismen darstellen lässt, folgt die Behauptung für alle Quader und damit auch für alle Borelmengen (Eindeutigkeit des Maße!)

