## 2.3. Nichtlineare Verzerrungen Borelscher Mengen

**Lemma 2.6** (Lokale Würfelverzerrung) Es seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\phi : U \to V$ bijektiv, stetig differenzierbar und $\det \phi'(x) \neq 0 \ \forall x \in U$.
Ist $x_0$ aus $U$ gegeben und $(W_j)_j$ eine Folge achsenparalleler (offener, halboffener oder abgeschl.) Würfel $W_j \subset U$, deren Durchmesser eine Nullfolge ist und die alle $x_0$ enthalten, dann gilt

$$\boxed{\lim_{k \to \infty} \frac{\lambda^n(\phi(W_k))}{\lambda^n(W_k)} = |\det \phi'(x_0)|}$$

Beweis: Die Meßbarkeit der Mengen $\phi(W_k)$ folgt aus Lemma 2.2.
(i) O.B.d.A. können wir annehmen: $\phi'(x_0) = id$:
Sonst setzen wir $G := \phi'(x_0)^{-1}$ und argumentieren so:

$$\frac{\lambda^n(\phi(W_k))}{\lambda^n(W_k)} = \frac{\lambda^n(\phi(W_k))}{\lambda^n(G \circ \phi(W_k))} \cdot \frac{\lambda^n(G \circ \phi(W_k))}{\lambda^n(W_k)}$$

$$= |\det G| \lambda^n(\phi(W_k)) = |\det \phi'(x_0)|^{-1} \lambda^n(\phi(W_k))$$

$$= |\det \phi'(x_0)| \cdot \underbrace{\frac{\lambda^n(G \circ \phi(W_k))}{\lambda^n(W_k)}}$$

Offenbar gilt $(G \circ \phi)'(x_0) = id$, daher können wir uns auf den unterklammerten Ausdruck zurückziehen und erhalten die Aussage für die Originalfunktion $\phi$ nach Multiplikation mit $|\det \phi'(x_0)|$.

(ii) Geben $\varepsilon > 0$ vor. Für alle $x, y$ aus offener Kugel um $x_0$ gilt dann

$$(\phi(x) - \phi(y)) - (x - y) = \int_0^1 [\phi'(y + t(x-y))(x-y)]\,dt - (x-y)$$

$$= \int_0^1 [\phi'(y + t(x-y)) - \phi'(x_0)]\,dt \ (x-y).$$

wegen $\phi'(x_0) = id$

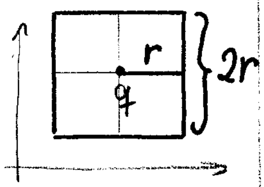
Ist die Kugel klein genug, dann wird [...] so klein (stetige Diffbarkeit!), dass

$$\| \phi(x) - \phi(y) - (x-y) \|_\infty \leq \varepsilon \, \| x-y \|_\infty .$$

$$\Rightarrow \quad (1-\varepsilon) \| x-y \|_\infty \leq \| \phi(x) - \phi(y) \|_\infty \leq (1+\varepsilon) \| x-y \|_\infty . \quad (*)$$

(iii) Betrachten zuerst abgeschlossene Würfel

$$W(q,r) = \{ x \in \mathbb{R}^n : \| x-q \|_\infty \leq r \}$$




$W(q,r)$ sei in der Kugel enthalten.

$$(*) \Rightarrow \quad \| \phi(x) - \phi(q) \|_\infty \leq (1+\varepsilon) r \quad \forall x \in W(q,r)$$

$$\Rightarrow \phi(x) \in W(\phi(q), (1+\varepsilon) r).$$

$$\Rightarrow \phi(W(q,r)) \subset W(\phi(q), (1+\varepsilon) r). \qquad (**)$$

Liegt andererseits $y$ in $W(\phi(q), (1-\varepsilon) r)$ und ist $r$ hinreichend klein, so ist die Gleichung

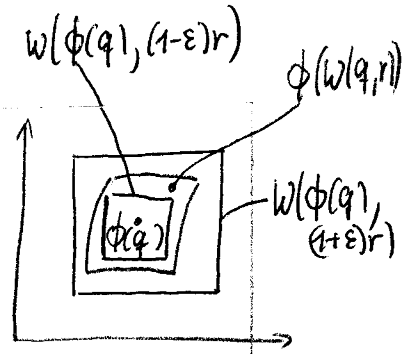
$$\phi(x) = y$$

mit genau einem $x$ aus der Kugel lösbar (Umkehrsatz; beachte dass für $y_0 = \phi(x_0)$ die Gleichung mit $x_0$ lösbar ist).
Weil $y$ im o.g. Würfel liegt, so auch $\phi(x) = y$, also

$$\| \phi(x) - \phi(q) \|_\infty \leq (1-\varepsilon) r .$$

Nach (*), unten $\Rightarrow$

$$\| x-q \| \leq r \quad \text{d.h.} \quad x \in W(q,r)$$




$$\Rightarrow y = \phi(x) \in \phi(W(q,r)).$$

Wir haben also insgesamt

$$W(\phi(q), (1-\varepsilon) r) \subset \phi(W(q,r)) \overset{(**)}{\subset} W(\phi(q), (1+\varepsilon) r)$$

für alle abgeschlossenen Würfel aus der Kugel bewiesen.
Entsprechend verhalten sich die Volumina, und nach Division durch $(2r)^n$ folgt

$$(1-\varepsilon)^n \leq \frac{\lambda^n(\phi(W(q,r)))}{(2r)^n} \leq (1+\varepsilon)^n .$$

Gleiches ist natürlich für die offenen Würfel $\overset{\circ}{W}(q,r)$ richtig und deshalb auch für alle Würfel $W$ "dazwischen":

$$\overset{\circ}{W}(q,r) \subset W \subset W(q,r),$$

also

$$(1-\varepsilon)^n \leq \frac{\lambda^n(\phi(W))}{\underbrace{(2r)^n}_{=\lambda^n(W)}} \leq (1+\varepsilon)^n$$

und mit $\varepsilon \downarrow 0$:

$$\frac{\lambda^n(\phi(W))}{\lambda^n(W)} \to 1$$

$\square$

**Lemma 2.7** (Globale Würfelverzerrung) Unter den Voraussetzungen an $U, V, \phi$ wie in Lemma 2.6 gilt für alle nach rechts halboffenen Würfel mit Abschließung in $U$

$$\boxed{\lambda^n(\phi(W)) = \int_W |\det \phi'(x)| \, d\lambda^n(x)}$$

Beweis: $W$ habe Kantenlänge $d$. Unterteilen ihn in $k^n$ rechts-halboffene disjunkte Würfel $W_k^{(j)}$ mit Kantenlänge $\frac{d}{k}$.

Setzen

$$f_k(x) := \sum_{j=1}^{k^n} \frac{\lambda^n(\phi(W_k^{(j)}))}{\lambda^n(W_k^{(j)})} \chi_{W_k^{(j)}}(x).$$

Weil $\phi$ bijektiv ist, zerfällt $\phi(W)$ in disjunkte Mengen $\phi(W_k^{(j)})$.

$$\Rightarrow \lambda^n(\phi(W)) = \sum_{j=1}^{k^n} \lambda^n(\phi(W_k^{(j)})) = \int f_k \, d\lambda^n, \qquad (*)$$

(denn $\int f_k \, d\lambda^n = \sum \lambda^n(\phi(W_k^{(j)})) \cdot \underbrace{\frac{1}{\lambda^n(W_k^{(j)})} \cdot \int \chi_{W_k^{(j)}} \, d\lambda}_{=1}$.)

Wählen wir $x \in U$ beliebig aus. Dann gilt entweder $x \notin W$ oder $x \in W$. In beiden Fällen gilt

$$\lim_{k \to \infty} f_k(x) = |\det \phi'(x)| \, \chi_W(x).$$

Im ersten ist das trivial. Im zweiten liegt $x$ in genau einem der Würfel $W_k^{(j)}$, d.h.

$$f_k(x) = \frac{\lambda^n(\phi(W_k^{(j)}))}{\lambda^n(W_k^{(j)})} \underbrace{\chi_{W_k^{j}}(x)}_{1}$$

und die Würfel ziehen sich für $k \to \infty$ auf $x$ zusammen. Dann folgt die obige Beziehung aus dem letzten Lemma.

Wir finden eine integrierbare Majorante für $|f_k|$ (siehe unten). Dann folgt aus dem Satz von Lebesgue:

$$\lambda^n(\phi(W)) \overset{(*)}{=} \lim_{k\to\infty} \int f_k \, d\lambda^n = \int \lim_{k\to\infty} f_k \, d\lambda^n = \int |\det \phi'| \chi_W \, d\lambda^n$$
$$= \int_W |\det \phi'| \, d\lambda^n,$$

also die Behauptung.

<u>Finden der Majorante:</u> Es existiert offenbar ein $L>0$ mit

$$\|\phi(x)-\phi(y)\|_\infty \le L \|x-y\|_\infty \quad \forall x,y \in \overline{W}.$$

$W_k^{(j)}$ habe Mittelpunkt $q$. Damit

$$\phi(W_k^{(j)}) \subset W(\phi(q), L \tfrac{d}{k})$$

↑ Seitenlänge von $W_k^{(j)}$.

$$\Rightarrow \frac{\lambda^n(\phi(W_k^{(j)}))}{\lambda^n(W_k^{j})} \le \frac{L^n (d/k)^n}{(d/k)^n} = L^n$$

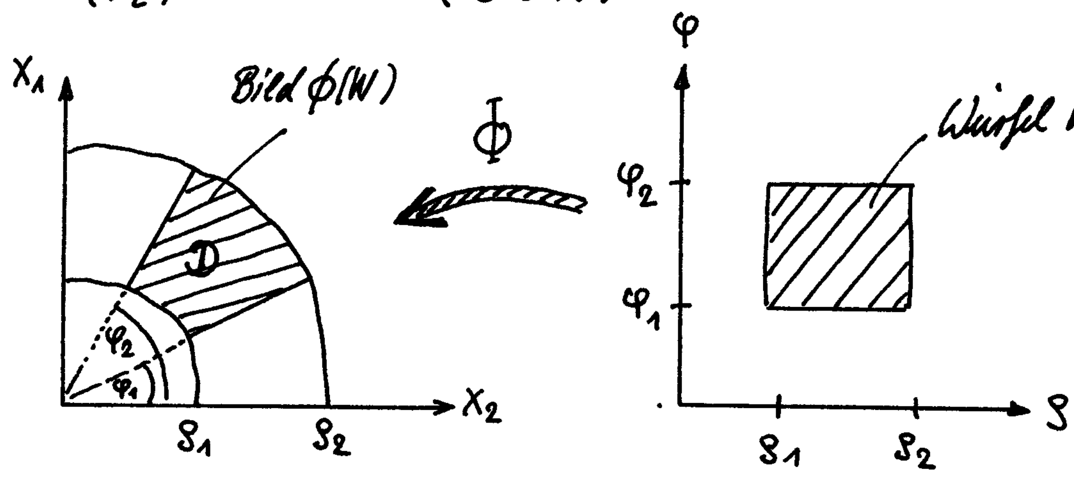
$$\Rightarrow |f_k(x)| \le \sum_j L^n \chi_{W_k^{(j)}}(x) \le L^n \chi_W(x) \quad \forall x. \qquad \square$$

<u>Anwendung des Satzes:</u>

Die Aussage des Lemmas wird oft als Formel für das <u>Volumenelement in krummlinigen Koordinaten</u> bezeichnet.

Betrachten wir dazu die bereits eingeführten <u>Polarkoordinaten</u>

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \phi(\rho, \varphi) = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \end{pmatrix}$$



Die Abbildung $\phi$ ist stetig differenzierbar und

$$\phi'(\varrho,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\varrho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \varrho\cos\varphi \end{pmatrix}$$

mit Funktionaldeterminante

$$|\det\phi'(\varrho,\varphi)| = \det\phi'(\varrho,\varphi) = \varrho .$$

Damit ist $\phi$ ein $C^1$-Diffeomorphismus von $]0,\infty[\times[0,2\pi[$.
Damit haben wir ein kleines Problem bei $\varrho = 0$ bzw $\varphi = 2\pi$.
Im ersten Fall ist $\phi'$ singulär, im zweiten gibt es (wie auch im ersten) Probleme mit der Bijektivität. Den vollen Kreis können wir daher im Moment noch nicht behandeln, aber das kleine Problem werden wir klären können. Vorerst betrachten wir ein Quadrat

$$0 < \varrho_0 \leq \varrho \leq \varrho_1$$

$$0 \leq \varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1 < 2\pi$$

und bekommen nach dem Lemma über globale Würfelzerlegung

$$\lambda^2(\phi([\varrho_0,\varrho_1]\times[\varphi_0,\varphi_1])) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{\varrho_0}^{\varrho_1} \varrho \, d\varrho \, d\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_0)(\varrho_1^2-\varrho_0^2).$$

Ohne diese Transformation, mit $\mathcal{D} := \phi(W)$ (siehe auch Skizze) gilt

$$\int_{\mathcal{D}} d\lambda^2 = \text{"}\iint_{\mathcal{D}} dx\,dy\text{"} \leftarrow$$

konventionelle Schreibweise, die an die Berechnung des Integrals über iterierte Integrale anknüpft und meint:

$$\lambda^2([x,x+dx]\times[y,y+dy]) = dx\,dy$$

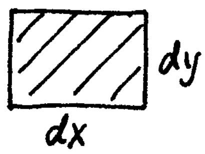
In diesem Sinne – zum Merken und Rechnen – interpretiert man die gefundenen Beziehungen einfach als

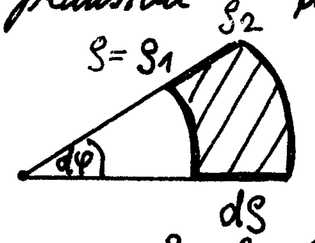
$$\boxed{dx\,dy = \varrho \, d\varrho \, d\varphi}$$

"<u>Flächenelement in Polarkoordinaten ist</u> $\varrho\, d\varrho\, d\varphi$"

↑ Flächenelement in kartesischen Koordinaten

Das ist auch geometrisch plausibel für infinitesimale Verzerrungen




$F = dx\,dy$

$$F = (\rho_2^2 - \rho_1^2)\left(\frac{d\varphi}{2\pi}\right)\pi$$

$$= \underbrace{(\rho_2 - \rho_1)}_{d\rho}\underbrace{(\rho_1 + \rho_2)}_{2\rho + d\rho} \cdot \frac{1}{2}\, d\varphi$$

$$= \rho\, d\rho\, d\varphi \quad + \text{Term höherer Ordng}$$

$$\approx \rho\, d\rho\, d\varphi$$

In Büchern zur Ingenieurmathematik findet man diese Betrachtung häufig.

---

Wir gehen nun einen Schritt weiter - von Würfeln zu offenen und Borelschen Mengen.

<u>Lemma 2.8.</u> (Verzerrung offener Mengen) Unter den Voraussetzungen von Lemma 2.6. an $U, V, \phi$ gilt für alle offenen $G \subset U$

$$\lambda^n(\phi(G)) = \int_G |\det \phi'(x)|\, d\lambda^n(x).$$

<u>Beweis:</u> Jede offene Menge läßt sich durch die Vereinigung abzählbar vieler nach rechts halboffener Würfel $(W_k)$ ausschöpfen.
→ (Übung!)

$\phi$ ist Bijektion $\Rightarrow$ $\phi(G)$ ist Vereinigung der disjunkten Mengen $\phi(W_k)$.

Lemma 2.7 $\Rightarrow$

$$\lambda^n(\phi(G)) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^n(\phi(W_k)) \overset{L.\,2.8}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \int |\det \phi'|\, \chi_{W_k}\, d\lambda^n$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \int \ldots$$

$$= \int \lim_{m\to\infty} \sum_{1}^{m} \ldots = \int \chi_G\, |\det \phi'|\, d\lambda^n = \int_G |\det \phi'|\, d\lambda^n \qquad \square$$

(Satz von B. Levi)

**Satz 2.9** (Verzerrung Borelscher Mengen) Die Aussage von Lemma 2.8. gilt auch für jede Borelmenge $A \subset U$,

$$\lambda^n(\phi(A)) = \int_A |\det \phi'(x)| \, d\lambda^n(x).$$

**Beweis:** Da $\phi(U)$ ein unendliches Maß haben kann, schöpfen wir $U$ aus durch beschränkte offene Mengen

$$U_k := \{ x \in U : \|x\| < k \text{ aber } \operatorname{dist}(x, \partial U) > \tfrac{1}{k} \}.$$ bw

$\overline{U_k}$ ist kompakt $\Rightarrow \phi(\overline{U_k})$ kompakt $\Rightarrow$ insbesondere $\phi(U_k)$ ist beschränkt

$$\Rightarrow \lambda^n(\phi(U_k)) = \int_{U_k} |\det \phi'(x)| \, d\lambda^n(x) < \infty \quad \forall k = 1, 2, \dots$$

Es sei $\mathcal{A}_k$ die Menge aller Borelmengen $A$ aus $\mathbb{R}^n$ mit

$$\lambda^n(\phi(U_k \cap A)) = \int_{A \cap U_k} |\det \phi'| \, d\lambda^n. \qquad (*)$$

Lemma 2.8. $\Rightarrow$ $\mathcal{A}_k$ umfasst alle offenen Mengen.

$\mathcal{A}_k$ ist – wir ahnen es – ein Dynkinsystem. Beispielsweise gilt natürlich $\mathbb{R}^n \in \mathcal{A}_k$. Auch folgt mit $A \in \mathcal{A}_k$

$$\begin{aligned}
\lambda^n(\phi((\mathbb{R}^n \setminus A) \cap U_k)) &= \lambda^n(\phi(U_k) \setminus \phi(A \cap U_k)) \\
&= \lambda^n(\phi(U_k)) - \lambda^n(\phi(A \cap U_k)) \quad \text{weil } \phi \text{ Bijektion ist} \\
&= \underbrace{\int_{U_k} |\det \phi'| \, d\lambda^n}_{\text{(für offene Mengen galt das)}} - \underbrace{\int_{A \cap U_k} |\det \phi'| \, d\lambda^n}_{\text{(für } A \text{ gilt es nach Def. von } \mathcal{A}_k)} \\
&= \int_{(\mathbb{R}^n \setminus A) \cap U_k} |\det \phi'| \, d\lambda^n
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus A \in \mathcal{A}_k$.

Mit Hilfe des Satzes über die Monotone Konvergenz zeigt man ähnlich

$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}_k$ für alle Folgen $(A_j)$ paarweise disjunkter Mengen aus $\mathcal{A}_k$.

Das Dynkinsystem $\mathcal{A}_k$ umfasst das System der offenen Mengen; dieses ist durchschnittsstabil.

$\Rightarrow$ $\mathcal{A}_k$ umfasst das von den offenen Mengen erzeugte Dynkin-System und dieses ist bereits eine $\sigma$-Algebra (Satz ).
$\mathcal{A}_k$ umfasst also die $\sigma$-Algebra der Borelmengen, denn diese wird von den offenen erzeugt.

Sei nun $A$ beliebige Borelmenge. Dann gilt

$$\lambda^n(\phi(A\cap U)) = \int \chi_{\phi(A\cap U)}\, d\lambda^n$$

$$= \int \lim_{k\to\infty} \chi_{\phi(A\cap U_k)}\, d\lambda^n \quad \text{(punktweise Konvergenz)}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int \chi_{\phi(A\cap U_k)}\, d\lambda^n \quad \text{(Satz von B. Levi)}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \lambda^n(\phi(A\cap U_k))$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int \chi_{A\cap U_k} |\det \phi'|\, d\lambda^n \quad \text{(wegen (*))}$$

$$= \int \lim_{k\to\infty} \chi_{A\cap U_k} |\det \phi'|\, d\lambda^n \quad \text{(B. Levi)}$$

$$= \int_{A\cap U} |\det \phi'|\, d\lambda^n. \qquad \square$$

## 2.4. Der Transformationssatz

In den letzten Abschnitten ging es um die Transformation von Integralen des Typs $\int d\lambda^n$. Jetzt wird dies angewendet zur Behandlung von Integralen der Form $\int_A f\, d\lambda^n$. Wir beginnen mit nichtnegativen Funktionen.

**Satz 2.10** (Erste Variante des Transformationssatzes)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\phi: U \to V \subset \mathbb{R}^n$ bijektiv und stetig differenzierbar. Dann gilt für alle nichtnegativen messbaren $f: V \to [0,\infty[$

$$\int_V f(x)\, d\lambda^n(x) = \int_U f(\phi(x))\, |\det \phi'(x)|\, d\lambda^n(x).$$

Die Menge $V$ ist dabei messbar.