<u>Nachtrag</u> Die folgenden Rechenregeln für Inhalte lassen sich vorteilhaft anwenden bzw. sind bereits verwendet worden: $\mathcal{R}$ sei ein Ring, μ ein Inhalt. Dann

⊛ zu S.

(i) $\mu(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_n)$ falls $A_i \cap A_j = \emptyset$

(ii) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B) \quad \forall A, B \in \mathcal{R}$ Ü.A.

(iii) $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

(iv) $\mu(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \leq \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_n) \quad \forall A_i \in \mathcal{R}$

(v) $\mu(\emptyset) = 0$.

Im Hinblick auf das Maß von Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ haben wir bis jetzt Folgendes:

- Wir können Elementarmengen messen, d.h. solche, die aus endlich vielen Mengenoperationen mit Quadern hervorgegangen sind
- und dieses "Maß" ist ein Prämaß.

Daraus wollen wir nun das Maß allgemeinerer Mengen konstruieren.

1.3. Fortsetzung von Prämaßen zu Maßen

Die eben beschriebene Situation ist nicht nur für den Fall $\Omega = \mathbb{R}^d$ interessant, sondern tritt auch bei der Konstruktion allgemeinerer Maße auf.

<u>Gegeben seien</u>: • Ring $\mathcal{R}$ über Grundmenge Ω
• Prämaß μ auf $\mathcal{R}$

Die Elemente von $\mathcal{R}$ nennen wir Elementarmengen

Wie wir bereits wissen, erzeugt $\mathcal{R}$ eine (kleinste) σ-Algebra.

<u>Ziel</u>: Fortsetzung von μ auf diese σ-Algebra.

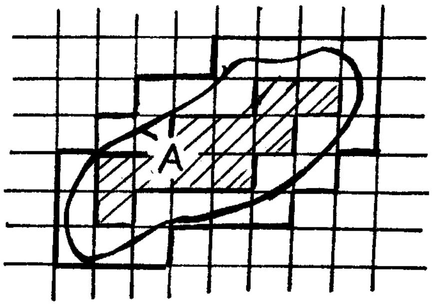
<u>Grundvoraussetzung:</u> Ω wird durch den Ring $\mathcal{R}$ ausgeschöpft, d.h.

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{(\infty)} E_k \quad \text{mit } E_k \in \mathcal{R} \ \forall k.$$

<u>Bsp 1.14</u> $\Omega = \mathbb{R}^d$
$\mathcal{R} = \mathcal{F}^d$ $\Rightarrow \Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{\mathcal{B}(k,0)}_{\text{Kugel vom Radius } k \text{ um } 0.}$

Hier ist die erzeugte σ-Algebra die σ-Algebra der Borelschen Mengen.

Eine Grundidee der Maßkonstruktion kann man sich etwa so plausibel machen:



Approximation von A durch Elementarmengen von innen und außen. Konvergieren beide Prozesse gegeneinander, dann hat A einen sinnvollen Inhalt.
ABER Wie soll man z.B. $A = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ von innen her approximieren?

<u>Def 1.15</u> Das <u>äußere Maß</u> einer beliebigen Teilmenge $A \subset \Omega$ (sie muss nicht zur σ-Algebra gehören oder zum Ring) ist definiert durch $A \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$\mu^*(A) = \inf_{\bigcup_1^{\infty} E_k \supset A} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k),$$

wobei alle E_k Elementarmengen sind.

Offenbar ist $\mu^*(A)$ definiert, denn erstens existiert eine Überdeckung von A durch Elementarmengen (Grundvoraus.!) und die Werte sind auf alle Fälle durch 0 nach unten beschränkt. Der Wert $+\infty$ ist dabei möglich (man denke an $\Omega = \mathbb{R}^d$ selbst).

<u>Bemerkung:</u> Das äußere Maß ist i.a. nicht σ-additiv, sondern nur subadditiv (kommt gleich).

Man sieht sofort:

$$\mu^*(\emptyset) = 0$$ (denn $\emptyset$ ist stets Elementarmenge)

$$A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$$ (gilt $B \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, so wird auch A überdeckt durch die E_k, somit kann $\mu^*(A)$ nicht größer werden)

<u>Satz 1.16</u> Für jedes $E \in \mathcal{R}$ gilt

$$\mu^*(E) = \mu(E).$$

<u>Beweis:</u> a) <u>$\mu^*(E) \leq \mu(E)$:</u> Das ist fast trivial, denn $E \subset E$.

Setze $E_1 = E$, $E_k = \emptyset$ $k = 2, 3, \ldots$

$$\Rightarrow \quad E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) = \mu(E_1) = \mu(E)$$

$$\Rightarrow \mu^*(E) \leq \mu(E).$$

b) <u>$\mu(E) \leq \mu^*(E)$:</u> Das ist etwas kniffliger.

Wir gehen wieder aus von

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$$

Grundidee: E von innen her durch Elementarmengen ausschöpfen und nutzen, dass wir ein Prämaß haben.

Dazu

- $E_k' := E \cap E_k$ — Sind auch Elementarmengen, liegen in E, sind aber nicht notw. disjunkt.

Offenbar gilt immer noch

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k' \quad \text{aber auch} \quad \bigcup E_k' \subset E \Rightarrow E = \bigcup \ldots$$

Jetzt machen wir die Mengen noch disjunkt:

$$E_1'' := E_1'$$

$$E_k'' := E_k' \setminus (E_1' \cup \ldots \cup E_{k-1}') \qquad \text{"Zuwächse"}$$

$$\Rightarrow \quad E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k''.$$

Alle E_k'' sind Elementarmengen. $\Rightarrow$

$$\mu(E) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k''\Big) \underset{\substack{\uparrow \\ \mu \text{ ist} \\ \text{Prämaß}}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k'') \underset{\substack{\uparrow \\ E_k'' \subset E_k}}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k).$$

Damit
$$\mu(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) \quad \text{für alle } (E_k)_{k=1}^{\infty} \text{ dieser Art}$$

Infimumbildung $\Rightarrow$
$$\mu(E) \leq \mu^*(E) \qquad \square$$

Kommen wir nun zur angekündigten Subadditivität.

<u>Satz 1.17</u> Das äußere Maß μ^* ist subadditiv, d.h. für jedes A aus der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ mit
$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\,, \quad A_k \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$$
gilt
$$\mu^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k).$$

<u>Beweis</u>: Betrachten nur den Fall $\sum_1^\infty \mu^*(A_k) < \infty$, der andere Fall ist trivial. Damit insbesondere $\mu^*(A_k) < \infty$ $\forall k$. <u>Geben $\varepsilon > 0$ vor.</u>
Nach Def. von $\mu^*(A_k)$ (Überdeckung durch Elementarmengen E_{kl}, $l = 1, 2, \dots$ und Infimumbildung)

$$\exists\, (E_{kl})_{l=1}^{\infty} \text{ mit } A_k \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} E_{kl}\,, \quad E_{kl} \text{ Elementarm.}$$

$$\text{und } \sum_{l=1}^{\infty} \mu(E_{kl}) \leq \mu^*(A_k) + 2^{-k}\varepsilon$$

Haben
$$A = \bigcup_k A_k \subset \underbrace{\bigcup_k \bigcup_l E_{kl}}_{B}. \qquad \begin{bmatrix} A \subset B \\ \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B) \end{bmatrix}$$

Die Doppelfolge $(E_{kl})_{l,k}$ überdeckt, alles sind Elementarmengen, somit

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(B) = \inf_{\dots} \sum_1^\infty \mu(\tilde{E}_k) \leq \sum_{k,l=1}^{\infty} \mu(E_{kl}) \leq$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty} \left(\mu^*(A_k) + 2^{-k}\varepsilon\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k) + \varepsilon .$$

Beliebigkeit von ε $\Rightarrow$ Behauptung. □

Noch sind wir mit der Lösung unseres Maßproblems nicht wesentlich weiter. Von außen können wir messen, aber von innen her gab es Schwierigkeiten (man denke an $\mathbb{Q}$).

Wir gehen einen Umweg und führen ein Abstandsmaß $d(A,B)$ für $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ ein.

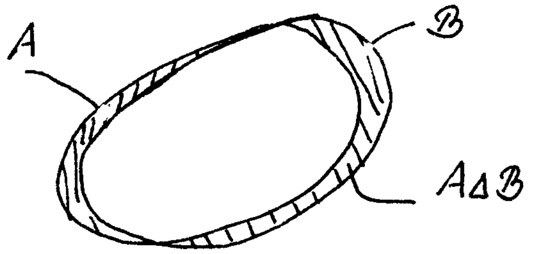
<u>Def 1.18</u> (<u>Symmetrische Differenz</u>) Die Menge

$$S(A,B) := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

heißt <u>symmetrische Differenz</u> von A und B,
Bezeichnung: $A \Delta B$.

Als Abstandsmaß von A und B definieren wir

$$\boxed{d(A,B) := \mu^*(A \Delta B)}$$



Ist das äußere Maß von $A\Delta B$ Null, dann sollten A und B identisch sein ...
ODER ?

<u>Eigenschaften von $A\Delta B$:</u>

(i) $A \Delta A = \emptyset$ trivial

(ii) $A \Delta B = B \Delta A$ "

(iii) $A \Delta B \subset (A \Delta C) \cup (C \Delta B)$

(iv) $(A_1 \cup B_1) \Delta (A_2 \cup B_2) \subset (A_1 \Delta A_2) \cup (B_1 \Delta B_2)$

(v) $(A_1 \cap B_1) \Delta (A_2 \cap B_2) \subset (A_1 \Delta A_2) \cup (B_1 \Delta B_2)$

(vi) $(A_1 \setminus B_1) \Delta (A_2 \setminus B_2) \subset (A_1 \Delta A_2) \cup (B_1 \Delta B_2)$

Beweis:

(iii) Es gilt (nicht offenbar ...)

$$A\setminus B \subset (A\setminus C)\cup(C\setminus B)$$ ← logisch ausdistributieren Ü.A.

u. analog $$B\setminus A \subset (B\setminus C)\cup(C\setminus A)$$ b.w.

Damit

$$(A\setminus B)\cup(B\setminus A) \subset \underbrace{(A\setminus C)\cup(C\setminus A)}_{A\Delta C}\cup\underbrace{(B\setminus C)\cup(C\setminus B)}_{B\Delta C}$$

(iv) Übungsaufgabe

(v) Hier gilt $(A_1\cap B_1)\setminus(A_2\cap B_2) \subset (A_1\setminus A_2)\cup(B_1\setminus B_2)$ beide

$(A_2\cap B_2)\setminus(A_1\cap B_1) \subset (A_2\setminus A_1)\cup(B_2\setminus B_1)$ Fälle ausdistr. b.w.

Aus beiden folgt die Aussage

(vi) Geht analog.

<u>Eigenschaften von $d(A,B)$:</u>

(i) $d(A,A)=0$ klar

(ii) $d(A,B)=d(B,A)$ auch

(iii) $d(A,B)\le d(A,C)+d(C,A)$

<u>denn</u>: $d(A,B)=\mu^*(A\Delta B) \le \mu^*(A\Delta C)+\mu^*(C\Delta B)$ ↑ (iii) sowie Subadditiv.

$= d(A,C)+d(C,B)$

(iv) $d(A_1\cup B_1, A_2\cup B_2) \le d(A_1,A_2)+d(B_1,B_2)$

(v) $d(A_1\cap B_1, A_2\cap B_2) \le$ — " —

(vi) $d(A_1\setminus B_1, A_2\setminus B_2) \le$ — " —

Die letzten 3 Fälle folgen wie (iii) aus den Eigenschaften von Δ.

<u>Lemma:</u> Für alle $A,B\in\mathcal{P}(\mathfrak{X})$ mit $\mu^*(A)<\infty$ und $\mu^*(B)<\infty$ gilt

$$|\mu^*(A)-\mu^*(B)| \le d(A,B).$$

Beweis: Zunächst gilt

$$d(A,\emptyset) = \mu^*((\underbrace{A\setminus\emptyset}_{A}) \cup (\underbrace{\emptyset\setminus A}_{\emptyset})) = \mu^*(A)$$

Folglich

$$\mu^*(A) = d(A,\emptyset) \underset{(iii)}{\leq} d(A,B) + d(B,\emptyset) = d(A,B) + \mu^*(B)$$

$$\Rightarrow \quad \mu^*(A) - \mu^*(B) \leq d(A,B)$$

Völlig analog (Rollentausch von A und B),

$$\mu^*(B) - \mu^*(A) \leq d(A,B)$$

Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Def. 1.19 (Meßbarkeit) $A \subset \Omega$ heißt <u>endlich meßbar</u>, wenn eine Folge von Elementarmengen A_n existiert mit $d(A_n, A) \to 0$, $n \to \infty$.
Ist A abzählbare Vereinigung endlich meßbarer Mengen, dann heißt A <u>meßbar</u>.
Wir bezeichnen die Menge der endlich meßbaren Mengen mit $\mathfrak{M}(\mu)$.

Bemerkung: "Endlich" bezieht sich hier auf endliche Ausdehnung im Sinne von "beschränkt" <u>und</u> eine einfache Struktur.
z.B. ist $\Omega = \mathbb{R}^d$ nicht endlich λ-meßbar, da $d(E_n, \mathbb{R}^d) = \infty$ für alle elementargeometr. Figuren.

Satz 1.20 Die Menge $\mathfrak{M}(\mu)$ der endlich meßbaren Mengen ist ein Ring. Das äußere Maß μ^* ist additiv auf $\mathfrak{M}(\mu)$.

Beweis: Seien $A, B \in \mathfrak{M}(\mu)$. Zu zeigen ist $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$ falls $A \cap B = \emptyset$ sowie die Ringeigenschaften.

<u>a) $\mathfrak{M}(\mu)$ ist Ring:</u> Mit Elementarmengen A_n, B_n gilt

$$d(A, A_n) \to 0, \quad d(B, B_n) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Deshalb folgt aus den Eigenschaften von d:

$$d(A_n \cup B_n, A\cup B) \le d(A_n, A) + d(B_n, B) \to 0$$
$$d(A_n \cap B_n, A\cap B) \le \quad -\parallel- \quad \to 0$$
$$d(A_n \setminus B_n, A\setminus B) \le \quad -\parallel- \quad \to 0.$$

$A_n\cup B_n$, $A_n\cap B_n$, $A_n\setminus B_n$ sind Elementarmengen. Aus allem folgt, dass $A\cup B, A\cap B, A\setminus B \in \mathfrak{M}(\mu)$.

b) Additivität

Für Elementarmengen gilt $\mu(E)=\mu^*(E)$. Wir nutzen das sowie das Lemma ($|\mu^*(A)-\mu^*(B)| \le d(A,B)$) und erhalten für $A := A_n$, $B := A$

$$\mu(A_n) = \mu^*(A_n) \to \mu^*(A)$$
$$\mu(B_n) = \mu^*(B_n) \to \mu^*(B).$$

Analog folgt

$$\mu(A_n \cup B_n) \to \mu^*(A\cup B)$$
$$\mu(A_n \cap B_n) \to \mu^*(A\cap B).$$

Weiter gilt

$$\mu(A_n) + \mu(B_n) = \mu(A_n\cup B_n) + \mu(A_n \cap B_n)$$

(Eigenschaft (ii) für Inhalte), S. 9. Aus den obigen Beziehungen ergibt sich für $n\to\infty$

$$\mu(A) + \mu(B) = \mu(A\cup B) + \mu(A\cap B),$$

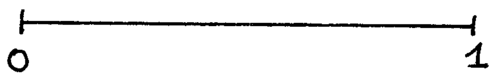
woraus bei $A\cap B = \emptyset$ die Additivität folgt. $\square$

Zur Abwechslung und weiteren Betrachtung betrachten wir

Beispiel 1.21 Cantorsches Diskontinuum

Man konstruiert es wie folgt in $\mathfrak{X} = \mathbb{R}$:

$E_0 = [0,1]$



E_0

$E_1 = [0,1] \setminus]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$

E_1

$E_2 =$ "E_1 minus mittlere Drittel"

E_2