Beweis: (i) Zunächst wird zusätzlich angenommen, dass $\det \phi'(x) \neq 0$ für alle $x \in U$ ist. Dann:

- Die Behauptung ist richtig für $f = \chi_B$ und alle Borelschen Teilmengen von V:

  $A = \phi^{-1}(B) \subset U$ ist messbar nach Lemma 2.1. Nach Satz 2.9. über die Verzerrung von Borelmengen ist dann der Nachweis fast trivial:

  $$\int \chi_B \, d\lambda^n = \lambda^n(B) = \lambda^n(\phi(A)) = \int \chi_A(x) |\det \phi'| \, d\lambda^n$$
  $$= \int \chi_B(\phi(x)) \, |\det \phi'(x)| \, d\lambda^n(x).$$

- Damit folgt die Aussage auch für alle Elementarfunktionen f.
- Sie gilt auch für alle nichtnegativen messbaren f:

  o.B.d.A $f = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus V$. Dann kann f als punktweiser Grenzwert einer monotonen Folge von Elementarfunktionen f_k dargestellt werden. Dann gilt

  $$\int f(x) \, d\lambda^n(x) = \lim_{k\to\infty} \int f_k(x) \, d\lambda^n(x) \quad \text{(nach Def. des Integrals)}$$
  $$= \lim_{k\to\infty} \int f_k(\phi(x)) \, |\det \phi'(x)| \, d\lambda^n(x) \quad \text{(eben gezeigt)}$$
  $$= \int \lim_{k\to\infty} f_k(\phi(x)) \, |\det \phi'(x)| \, d\lambda^n(x) \quad \text{(B. Levi)}$$
  $$= \int f(\phi(x)) \, |\det \phi'(x)| \, d\lambda^n(x).$$

(ii) Wir befreien uns nun von der Voraussetzung $\det \phi'(x) \neq 0$.

Dazu verwenden wir das Lemma von Sard! Sei dazu wieder

$$S = \{x \in U : \det \phi'(x) = 0\}.$$

Sard $\Rightarrow$ $\lambda^n(\phi(S)) = 0$. Somit

$$\int_V f(x) \, d\lambda^n(x) = \int_{\phi(U)} f(x) \, d\lambda^n(x) = \int_{\phi(U\setminus S)} f(x) \, d\lambda^n(x) + \underbrace{\int_{\phi(S)} f(x) \, d\lambda^n(x)}_{=0}$$

Bijektivität von ϕ

$\chi_A = 1$
$\Updownarrow$
$x \in \phi^{-1}(B)$
$\Updownarrow$
$\phi(x) \in B$
$\Updownarrow$
$\chi_B(\phi(x)) = 1$

$$= \int_{\phi(U\setminus S)} f(x)\,d\lambda^n(x).$$

Die Abbildung $x \mapsto \det \phi'(x)$ ist stetig, also ist S die Menge der Nullstellen einer stetigen Abbildung und deshalb abgeschlossen. Somit ist $U\setminus S$ offen. Auf $U\setminus S$ sind aber die Voraussetzungen von Schritt (i) erfüllt, damit

$$\int_{\phi(U\setminus S)} f(x)\,d\lambda^n(x) = \int_{U\setminus S} f(\phi(x))\,|\underbrace{\det \phi'(x)}_{=0 \text{ auf } S \ \Rightarrow}|\,d\lambda^n(x)$$

$$= \int_U f(\phi(x))\,|\det \phi'(x)|\,d\lambda^n(x). \quad *) \quad \square$$

<u>Folgerung</u>: Folgende Schritte sind zur Berechnung von

$$\int_V f(x)\,d\lambda^n(x)$$

mit Hilfe einer Variablentransformation zu absolvieren:

- $x = \phi(t)$ (Substitution)
- $d\lambda^n(x) = |\det \phi'(t)|\,d\lambda^n(t)$ Transformation des Maßes bzw. Differentials
- $V = \phi(U)$
  $\Rightarrow$ ersetzen von V durch das neue Integrationsgebiet U
- Einsetzen von $x = \phi(t)$ in f

$$\Rightarrow \int_V f(x)\,d\lambda^n(x) = \int_U f(\phi(t))\,|\det \phi'(t)|\,d\lambda^n(t)$$

---

*) Die Menge $\phi(U\setminus S)$ ist meßbar, denn auf $U\setminus S$ gilt $\det\phi' \neq 0$ und $U\setminus S$ ist offen (wende Lemma 2.2. an)
$\phi(S)$ hat Maß Null, ist also auch meßbar. Damit ist auch $V = \phi(U\setminus S) \cup \phi(S)$ meßbar, so dass das erste in der Aussage des Satzes aufgeschriebene Integral definiert ist.

Nun lassen wir die Voraussetzung $f \geq 0$ fallen.

Satz 2.11 (Transformationssatz) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\phi : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ bijektiv und stetig differenzierbar. Eine messbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist in diesem Fall genau dann über V integrierbar, wenn die transformierte Funktion $x \mapsto f(\phi(x))\,|\det \phi'(x)|$ über U integrierbar ist. Dabei gilt

$$\boxed{\int_V f(x)\,d\lambda^n(x) = \int_U f(\phi(x))\,|\det \phi'(x)|\,d\lambda^n(x)}$$

Beweis: $\Rightarrow$) Sei f über V integrierbar. Dann sind f^+ und f^- integrierbar, die angegebene Formel gilt für f^+ und f^- und wegen $|\det \phi'| \geq 0$ gilt

$$f^{\pm}\,|\det \phi'| = \left(f\ \ |\det \phi'|\right)^{\pm},$$

folglich ist $f\,|\det \phi'|$ integrierbar und obige Formel folgt durch Subtraktion beider Teile.

$\Leftarrow$: Die Umkehrung geht völlig analog. □

Gelegentlich gibt es Probleme mit den Rändern des Integrationsgebietes, z.B. im Falle von Polarkoordinaten bei $\varrho = 0$ und $\varphi = 2\pi$. Deshalb beweisen wir noch

Satz 2.12 (Transformationssatz, verfeinert) Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Weiter sei $C \subset U$ kompakt und die Einschränkung von ϕ auf das Innere $\mathring{C}$ injektiv. Der Rand ∂C habe das Maß Null.

Dann ist eine messbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ genau dann über $\phi(C)$ integrierbar, wenn die transformierte Funktion $x \mapsto f(\phi(x))\,|\det \phi'(x)|$ über C integrierbar ist. Dabei gilt

$$\int_{\phi(C)} f\,d\lambda^n = \int_C f(\phi(x))\,|\det \phi'(x)|\,d\lambda^n(x).$$

Beweis: $\phi(C) = \phi(\mathring{C}) \cup \phi(\partial C)$, wobei $\phi(\partial C) \cap \phi(\mathring{C}) \neq \emptyset$ sein kann.

Aber wir zeigen $\lambda^n(\phi(\partial C)) = 0$, und damit gilt dann

$$\int_{\phi(C)} f(x)\, d\lambda^n(x) = \int_{\phi(\mathring{C})} f(x)\, d\lambda^n(x).$$

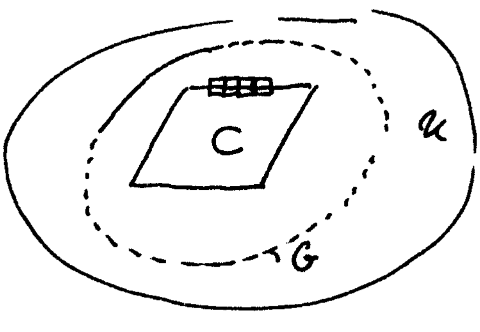
Da die Aussage für $\phi(\mathring{C})$ gilt, ist sie auch für $\phi(C)$ gültig, denn

$$\int_{\phi(\mathring{C})} f\, d\lambda = \int_{\mathring{C}} f(\phi(x))\, |\det \phi'(x)|\, d\lambda^n(x)$$

$$= \int_{C} f(\phi(x))\, |\det \phi'(x)|\, d\lambda^n(x) \quad \text{wegen } \lambda^n(\partial C) = 0.$$

Bleibt zu zeigen: $\phi(\partial C)$ hat das Maß Null.

C ist kompakt $\Rightarrow$ Finden offene, beschränkte Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ mit $C \subset G \subset \bar{G} \subset \mathcal{U}$. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben.



∂C ist Nullmenge, kann daher überdeckt werden durch endlich viele Quader, deren Maßsumme kleiner ε ist. Das geht auch mit Würfeln, wie man sich überlegt (siehe z. B. D. Ferus, Analysis III)

$$\Rightarrow \partial C \subset \bigcup_k W_k \quad \text{mit} \quad \sum_k \lambda^n(W_k) < \varepsilon$$

Weil G offen ist, können wir auch $W_k \subset G$ $\forall k$ annehmen.

ϕ ist auf $\bar{G}$ Lipschitzstetig mit einer Konstanten $L > 0$, wobei wir das in der Maximum-Norm $\|\cdot\|_\infty$ annehmen können

$\Rightarrow$ $\phi(W_k) \subset$ Würfel mit Volumen $L^n \lambda^n(W_k)$

(vgl. Beweis des Lemmas von Sard).

$$\Rightarrow \lambda^n(\phi(\partial C)) \leq \lambda^n\Big(\bigcup_k \phi(W_k)\Big) \leq \sum_k \lambda^n(\phi(W_k))$$

$$\leq \sum_k L^n \lambda^n(W_k) < L^n \varepsilon.$$

Beliebigkeit von ε $\Rightarrow$ $\lambda^n(\phi(\partial C)) = 0$. $\square$

2.5. Weitere Beispiele

Beispiel 2.13 Fortsetzung "Gaußsches Fehlerintegral" (vgl. Bsp. 1.70)

Wir wissen bereits, dass $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ eine integrierbare Funktion definiert und haben noch den Wert des Integrals

$$I = \int f \, d\lambda^2$$

zu berechnen.

Für jedes $R > 0$ ist f auf dem abgeschlossenen Kreis $\overline{B(0,R)}$ stetig, also dort integrierbar. Wir integrieren zuerst über $B(0,R)$ und lassen dann R gegen Unendlich streben, um I zu bestimmen.

$$\int_{\overline{B(0,R)}} f(x,y)\, d\lambda^2(x,y) \underset{\text{Polarkoord.}}{=} \int_{[0,R]\times[0,2\pi]} e^{-\varrho^2} \varrho \, d\lambda^2(\varrho,\varphi)$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\int_{\varrho=0}^{R} e^{-\varrho^2} \varrho \, d\varrho \right) d\varphi = 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{e^{-R^2}}{2} \right).$$

Wir haben dabei den letzten Satz angewendet mit der kompakten Menge

$$C = [0,R] \times [0,2\pi],$$

in der die zur Transformation auf Polarkoordinaten verwendete Funktion ϕ nicht bijektiv ist. Aber in $\overset{\circ}{C} =]0,R[\times]0,2\pi[$ ist sie es und ∂C hat das Maß Null. Folglich ist die angewendete Transformation richtig. Außerdem wurde der Satz von Fubini verwendet.

$R \to \infty$: Setzen $R_n = n$ und definieren

$$f_n(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & x^2+y^2 \leq R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(f_n) ist monoton wachsend und konvergiert punktweise gegen f.

Satz von B. Levi $\Rightarrow$

$$\int f\,d\lambda^2 = \lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\lambda^2 = \lim_{n\to\infty} 2\pi\left(\tfrac{1}{2} - e^{-n^2}/2\right) = \pi .$$

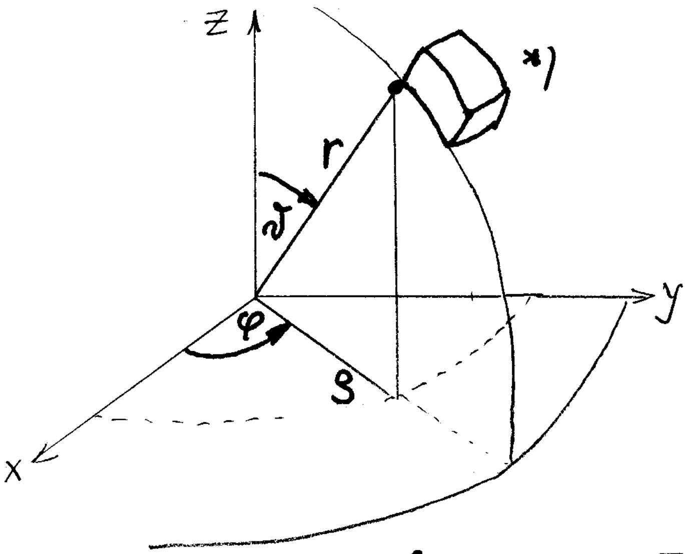
Dieser Wert π war in Bsp. 1.70 schon benutzt worden.

<u>Beispiel 2.14</u> <u>Kugelkoordinaten</u>

Diese Koordinaten werden beschrieben durch die Transformation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \phi(r,\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\phi : [0,\infty[\times [0,\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$$



"Nordpol" : $\vartheta = 0$
"Südpol" : $\vartheta = \pi$
$\varrho = r\sin\vartheta$

In puncto ϑ ist die Literatur nicht einheitlich!

ϕ ist ein Diffeomorphismus auf $]0,\infty[\times]0,\pi[\times]0,2\pi[$.
Auch anschaulich ist klar, dass bei $\vartheta \in \{0,2\pi\}$ der Winkel φ nicht festgelegt ist und bei $r=0$ weder ϑ noch φ.
Wir erhalten

$$\phi' = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\varphi & -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

und

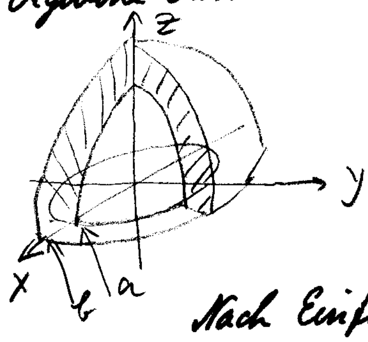
$$\det\phi' = r^2\sin\vartheta$$

$\Rightarrow$ (Merkformel) $\boxed{dx\,dy\,dz = r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi}$

"Volumenelement in Cartes. Koordinaten" ~ in Kugelkoord.

Bsp. 2.15 **Trägheitsmoment einer homogenen Hohlkugel K**

Gegebene Daten: Radien $0 < a < b$, Massendichte m.



Trägheitsmoment bzgl. z-Achse:

$$\Theta := \int_K m\,(x^2+y^2)\,d\lambda^3(x,y,z)$$

Nach Einführung von Kugelkoordinaten, mit

$$x^2+y^2 = \varrho = r\sin\vartheta$$

$$\Rightarrow \Theta = \int_{r=a}^{b} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} m\, r^2 \sin^2\vartheta \; r^2 \sin\vartheta \, d\varphi\, d\vartheta\, dr$$

$$= \int_a^b \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} m\, r^4 \sin^3\vartheta \, d\varphi\, d\vartheta\, dr = m \cdot 2\pi \left.\frac{r^5}{5}\right|_a^b \underbrace{\int_0^{\pi} \sin^3\vartheta\, d\vartheta}_{=\frac{4}{3}}$$ b.w.

$$= \frac{8 m \pi}{15}\,(b^5 - a^5)$$