Lösungen - Analysis III - Juli-Klausur 2008

1. Aufgabe

12 Punkte (2+5+5)

(i) $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt *messbar*, wenn für jedes $c \in \overline{\mathbb{R}}$ gilt:

$$f^{-1}(]c,\infty]) = \{x \in \Omega \,|\, f(x) > c\} \in \mathfrak{A}\,.$$

(ii) Mit f und g sind auch die Differenzen $f-g$ und $g-f$ messbar.

$$\begin{aligned}\{x \in \Omega \,|\, f(x) \geq g(x)\} &= \{x \in \Omega \,|\, (g-f)(x) \leq 0\} \\ &= \Omega \setminus \{x \in \Omega \,|\, (g-f)(x) > 0\} \text{ ist messbar.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\{x \in \Omega \,|\, f(x) = g(x)\} \\ &\quad = \{x \in \Omega \,|\, f(x) \leq g(x)\} \cap \{x \in \Omega \,|\, f(x) \geq g(x)\} \\ &\quad = (\Omega \setminus \{x \in \Omega \,|\, (f-g)(x) > 0\}) \cap \{x \in \Omega \,|\, f(x) \geq g(x)\}\end{aligned}$$

ist messbar (Eigenschaften der σ-Algebra $\mathfrak{A}$).

(iii) Sei $c \in \overline{\mathbb{R}}$.

"$\Longrightarrow$": Ist f messbar, dann folgt aus (ii), mit konstantem (und damit messbarem) $g \equiv c$, dass $\{f = c\}$ messbar ist, also $\{f = c\} \in \mathfrak{A}$.

"$\Longleftarrow$": Seien $n \in \mathbb{N}$ und $f(\Omega) = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\} \subset \overline{\mathbb{R}}$, sowie $A_k = \{f = c_k\}$ für $k \in \{1, \ldots, n\}$. Nach Voraussetzung gilt $A_k \in \mathfrak{A}$, $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$. Dann gilt mit der Definition aus (i), für jedes $c \in \overline{\mathbb{R}}$:

$$\{f > c\} = \{x \in \Omega \,|\, f(x) > c\} = \bigcup_{\{k \,|\, c_k > c\}} A_k \in \mathfrak{A}\,.$$

2. Aufgabe

12 Punkte (6+2+4)

(i) Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. f_n ist messbar auf $B(0,1)$, da stetig, nicht-negativ und $f_n(x) \leq \left(\frac{1}{n}\right)^{-\alpha}$ für alle $x \in B(0,1)$. Wegen

$$\int_{B(0,1)} \left(\frac{1}{n}\right)^{-\alpha} d\lambda^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^{-\alpha} \lambda^2(B(0,1)) < \infty$$

ist f_n Lebesgue-integrierbar auf $B(0,1)$. Es gilt mit $A := \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| < \frac{1}{n}\}$ und $B = B(0,1) \setminus A = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, \frac{1}{n} \leq |x| \leq 1\}$:

$$\int_{B(0,1)} f_n \, d\lambda^2 = \int_A f_n \, d\lambda^2 + \int_B f_n \, d\lambda^2 = \int_A \left(\frac{1}{n}\right)^{-\alpha} d\lambda^2 + \int_B |x|^{-\alpha} d\lambda^2\,.$$

Die Transformation in Polarkoordinaten ergibt:

$$\begin{aligned}
(a): \quad & \lambda^2(A) = \int_{[0,\frac{1}{n}[\times[0,2\pi]} r\, d\lambda^2(r,\varphi) \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{[0,\frac{1}{n}[} \int_{[0,2\pi]} r\, d\lambda(\varphi)\, d\lambda(r) \\
& \qquad = 2\pi \int_0^{\frac{1}{n}} r\, dr = \pi \left(\tfrac{1}{n}\right)^2 , \\
(b): \quad & \int_B |x|^{-\alpha} d\lambda^2 = \int_{[\frac{1}{n},1]\times[0,2\pi]} r^{-\alpha} \cdot r\, d\lambda^2(r,\varphi) \\
& \qquad = \int_{[\frac{1}{n},1]\times[0,2\pi]} r^{1-\alpha}\, d\lambda^2(r,\varphi) \\
& \qquad \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{[\frac{1}{n},1]} \int_{[0,2\pi]} r^{1-\alpha}\, d\lambda(\varphi)\, d\lambda(r) \\
& \qquad = 2\pi \int_{\frac{1}{n}}^1 r^{1-\alpha} dr = \tfrac{2\pi}{2-\alpha} [r^{2-\alpha}]_{r=1/n}^{r=1} \\
& \qquad = \tfrac{2\pi}{2-\alpha} (1 - \left(\tfrac{1}{n}\right)^{2-\alpha}).
\end{aligned}$$

Daraus folgt:
$\int_{B(0,1)} f_n\, d\lambda^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^{-\alpha} \lambda^2(A) + \int_B |x|^{-\alpha} d\lambda^2 = \pi \left(\frac{1}{n}\right)^{2-\alpha} + \frac{2\pi}{2-\alpha}(1 - \left(\frac{1}{n}\right)^{2-\alpha})$.

(ii) Nach (i) gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B(0,1)} f_n\, d\lambda^2 = \begin{cases} +\infty & \alpha > 2 \\ \frac{2\pi}{2-\alpha} & 0 < \alpha < 2\,. \end{cases}$$

(iii) Es gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in B(0,1)$. Wegen der Monotonie von f_n folgt mit Satz von Beppo Levi:

$$\int_{B(0,1)} f\, d\lambda^2 = \lim_{n\to\infty} \int_{B(0,1)} f_n\, d\lambda^2 = \begin{cases} +\infty & \alpha > 2 \\ \frac{2\pi}{2-\alpha} & 0 < \alpha < 2\,. \end{cases}$$

Damit ist f auf $B(0,1)$ λ^2-integrierbar genau dann, wenn $\alpha \in]0,2[$.

3. Aufgabe

12 Punkte (8+4)

(i) **Variante 0**: Eine Stammfunktion von v ist $\Phi(x,y,z) = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - xyz$ (scharfes Hinsehen).

Gradientenfeld:

Variante 1: Nachprüfen der Integrabilitätsbedingung:

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = -z = \frac{\partial v_2}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial v_1}{\partial z} = -y = \frac{\partial v_3}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial v_2}{\partial z} = -x = \frac{\partial v_3}{\partial y}.$$

Da $\mathbb{R}^3$ sternförmig ist, ist v ein Gradientenfeld, d.h. es existiert ein Skalarfeld $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\nabla\Phi = v$.

Variante 2: Nachprüfen der Symmetrie der Funktionalmartix Dv von v:

$$D_{(x,y,z)}v = (D_{(x,y,z)}v_1, D_{(x,y,z)}v_2, D_{(x,y,z)}v_3) = \begin{pmatrix} 2x & -z & -y \\ -z & 2y & -x \\ -y & -x & -2z \end{pmatrix}$$

ist symmetrisch. Da $\mathbb{R}^3$ sternförmig ist, ist v ein Gradientenfeld, d.h. es existiert ein Skalarfeld $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\nabla\Phi = v$.

Stammfunktion:

Gesucht ist ein stetig differenzierbares Skalarfeld $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\nabla\Phi = v$.
Variante 1: Es gilt

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = v_1 \;\Rightarrow\; \Phi(x,y,z) = \int v_1(x,y,z)\,dx = \frac{1}{3}x^3 - xyz + c(y,z)\,,$$

mit c unabhängig von der Variablen x. Wegen $\frac{\partial\Phi}{\partial y} = v_2$ gilt

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = -xz + \frac{\partial c}{\partial y}(y,z) \stackrel{!}{=} y^2 - xz\,,$$

also ist c von der Form $c(y,z) = \frac{1}{3}y^3 + d(z)$, wobei d nur noch von der Variablen z abhängig sein kann. Es bleibt d zu bestimmen. Dafür nutzen wir die Gleichung $\frac{\partial\Phi}{\partial z} = v_3$ aus:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = -xy + d'(z) \stackrel{!}{=} z^2 - xy \quad \Rightarrow d(z) = \frac{1}{3}z^3 + e \;\; (e \in \mathbb{R}, \text{ z.B. } e = 0)\,.$$

Eine Stammfunktion von v wäre dann $\Phi(x,y,z) = \frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3) - xyz$.
Variante 2: Sei $r = (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3$ gegeben und $(0,0,0)^T$ der Sternmittelpunkt von $\mathbb{R}^3$. Betrachte dann die Strecke, gegen durch

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3 : \quad t \mapsto (0,0,0)^T + t(x,y,z)^T.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\Phi(x,y,z) = \textstyle\int_\gamma v(r)\cdot dr &= \int_0^1 (v\circ\gamma)(t)\cdot\gamma'(t)\,dt \\ &= \int_0^1 t^2 \begin{pmatrix} x^2 - yz \\ y^2 - xz \\ z^2 - xy \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 t^2((x^3+y^3+z^3) - 3xyz)\,dt \\ &= \tfrac{1}{3}(x^3+y^3+z^3) - xyz\end{aligned}$$

eine Stammfunktion von v.

Wegintegral:

Es gilt $\gamma(0) = (0,0,0)^T$, $\gamma(1) = (0,1,0)^T$, also

$$\int_\gamma v(r)\cdot d(r) = \Phi(\gamma(1)) - \Phi(\gamma(0)) = \frac{1}{3}.$$

(ii) Die Bogenlänge L der Astroide lässt sich bestimmen durch

$$
\begin{aligned}
L = \int_\gamma dx = \int_{[0,2\pi]} |\gamma'(t)|\,dt = &\int_0^{2\pi} \left| 3a \begin{pmatrix} -\cos^2(t)\sin(t) \\ \sin^2(t)\cos(t) \end{pmatrix} \right| dt \\
= &\ 3a \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^4(t)\sin^2(t) + \sin^4(t)\cos^2(t)}\,dt \\
= &\ 3a \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2(t)\sin^2(t)(\cos^2(t)+\sin^2(t))}\,dt \\
= &\ 3a \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2(2t)/4}\,dt \\
= &\ \frac{3}{2}a \textstyle\int_0^{2\pi} |\sin(2t)|\,dt \\
\overset{(*)}{=} &\ \frac{3}{2}a \cdot 4 \textstyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)\,dt = 3a[-\cos(2t)]_{t=0}^{t=\pi/2} \\
= &\ 6a\,,
\end{aligned}
$$

wobei wir bei $(*)$ die $\pi/2$-Periodizität von $|\sin(2t)|$ ausgenutzt haben.

4. Aufgabe

10 Punkte (5+5)

(i) Die Schnittpunkte der 3 Kurven sind $(4,1)$, $(2,2)$ und $(4,4)$. Es gilt

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2 \le x \le 4\,,\ \frac{4}{x} \le y \le x\} \quad \text{(Normalbereich)}$$

und damit

$$
\begin{aligned}
\lambda^2(B) = \int_B 1\,d\lambda^2(x,y) \overset{\text{Fubini}}{=} &\int_{[2,4]} \int_{[\frac{4}{x},x]} 1\,d\lambda(y)\,d\lambda(x) \\
= &\int_2^4 \int_{\frac{4}{x}}^x 1\,dy\,dx = \int_2^4 (x - \frac{4}{x})\,dx \\
= &\left[\frac{1}{2}x^2 - 4\ln(x)\right]_{x=2}^{x=4} \\
= &\ \frac{1}{2}(16-4) - 4(\ln(4) - \ln(2)) \\
= &\ 6 - 4\ln(2)\,.
\end{aligned}
$$

(ii) Nach Definition (Oberfächenintegral 2. Art) gilt:

$$\int_S v \cdot n\,d\sigma = \int_{[0,2]\times[0,2\pi]} (v \circ c)(r,\varphi) \cdot N(r,\varphi)\,d(r,\varphi)\,,$$

wobei $N(r,\varphi) = \frac{\partial c}{\partial r}(r,\varphi) \times \frac{\partial c}{\partial \varphi}(r,\varphi)$, $(r,\varphi) \in [0,2] \times [0,2\pi]$. Gesucht ist dann offensichtlich

$$g := (v \circ c) \cdot N.$$

Wir bestimmen zuerst N.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial c}{\partial r} \times \frac{\partial c}{\partial \varphi} = &\begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -r\sin(\varphi) & r\cos(\varphi) & \frac{1}{2\pi} \end{vmatrix} \\
= &\ i\frac{1}{2\pi}\sin(\varphi) - j\frac{1}{2\pi}\cos(\varphi) + kr(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi))
\end{aligned}
$$

Ersetzen wir i, j, k durch die Einheitsvektoren e_1, e_2, e_3 des $\mathbb{R}^3$ so erhalten wir

$$N(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi}\sin(\varphi) \\ -\frac{1}{2\pi}\cos(\varphi) \\ r \end{pmatrix},$$

und schließlich

$$\begin{aligned} g(r,\varphi) = (v\circ c)(r,\varphi)\cdot N(r,\varphi) = & \begin{pmatrix} r\sin(\varphi) \\ -r\cos(\varphi) \\ \frac{1}{2\pi}\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi}\sin(\varphi) \\ -\frac{1}{2\pi}\cos(\varphi) \\ r \end{pmatrix} \\ = & \frac{1}{2\pi} r\sin^2(\varphi) + \frac{1}{2\pi} r\cos^2(\varphi) + \frac{1}{2\pi} r\varphi \\ = & \frac{1}{2\pi} r(1+\varphi). \end{aligned}$$

5. Aufgabe

4 Punkte

Sei $i \in \{1,2,3\}$ und

$$F : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}\,, \quad F := \begin{pmatrix} 0 \\ uv \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-te Komponente}$$

Dann gilt $\operatorname{div} F = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial F_j}{\partial x_j} = \frac{\partial(uv)}{\partial x_i} = v\frac{\partial u}{\partial x_i} + u\frac{\partial v}{\partial x_i}$ und mit dem Gaußschen Integralssatz

$$\int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx + \int_\Omega v\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx = \int_\Omega \operatorname{div} F dx = \int_{\partial\Omega} F\cdot n\,d\sigma = \int_{\partial\Omega} uv\,n_i\,d\sigma\,.$$

Wir erhalten schließlich

$$\int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx = \int_{\partial\Omega} uv\,n_i\,d\sigma - \int_\Omega v\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx.$$