TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 08
Institut für Mathematik 17.07.2008
Prof. Dr. F. Tröltzsch / Dipl.-Math. V. Dhamo

Klausur Analysis III

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Keine Hilfsmittel (Handy, Taschenrechner, etc.) zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4-Blättern abzugeben. Für jede Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Auf jedes Blatt Name und Matrikelnummer schreiben! Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an bzw. begründen Sie ihre Antworten.

Die Bearbeitungszeit beträgt **110 Minuten**.

Tip: Beginnen Sie mit den Aufgaben(teilen), die Ihnen am leichtesten fallen. Die Aufgaben sind nach Themengebieten geordnet.

Die Klausur ist mit **25** von **50** Punkten bestanden.

Zur Nachklausur ist zugelassen, wer mindestens **8** Punkte erzielt.

1	2	3	4	5	$\sum$

1. Aufgabe

12 Punkte (2+5+5)

Gegeben seien ein Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ und Funktionen $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$.

(i) Geben Sie die in der Vorlesung gebrachte Definition des Begriffs "messbar" für die Funktion f an.

(ii) Begründen Sie mit Hilfe der Definition aus (i): Sind f, g messbar, so auch die Mengen $\{x \in \Omega \,|\, f(x) \geq g(x)\}$ und $\{x \in \Omega \,|\, f(x) = g(x)\}$.

(iii) Zeigen Sie: Nimmt f nur endlich viele Werte an, dann ist f genau dann messbar, wenn für alle $c \in \overline{\mathbb{R}}$ die Beziehung

$$\{f = c\} := \{x \in \Omega \,|\, f(x) = c\} \in \mathfrak{A}$$

gilt.

2. Aufgabe

12 Punkte (6+2+4)

Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, und $\alpha > 0$, $\alpha \neq 2$, sei

$$f_n : \mathbb{R}^2 \supset B(0,1) \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \begin{cases} |x|^{-\alpha}, & |x| \geq \frac{1}{n} \\ \left(\frac{1}{n}\right)^{-\alpha}, & |x| < \frac{1}{n}, \end{cases}$$

wobei $B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| \leq 1\}$ die abgeschlossene Einheitskugel im $\mathbb{R}^2$ ist.

(i) Begründen Sie, warum f_n für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, Lebesgue-integrierbar auf $B(0,1)$ ist, und berechnen Sie das Integral $\int_{B(0,1)} f_n \, d\lambda^2$ ($\lambda^2 =$ Lebesgue-Maß in $\mathbb{R}^2$).

(ii) Bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty} \int_{B(0,1)} f_n \, d\lambda^2$.

(iii) Was lässt sich über die λ^2-Integrierbarkeit auf $B(0,1)$ von $f : B(0,1) \to \overline{\mathbb{R}}$, $f(x) = |x|^{-\alpha}$ sagen?

3. Aufgabe

12 Punkte (8+4)

(i) Überprüfen Sie, ob das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$v(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 - yz \\ y^2 - xz \\ z^2 - xy \end{pmatrix}$$

ein Gradientenfeld ist und finden Sie gegebenenfalls eine Stammfunktion von v. Berechnen Sie das Wegintegral von v entlang des Weges

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \sin(\pi t) \\ 2t^2 - t \\ t(e^{t^2-t} - 1) \end{pmatrix}.$$

(ii) Bestimmen Sie die Bogenlänge der Astroide, welche gegeben ist durch

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 , \quad \varphi \mapsto (a\cos^3(\varphi), a\sin^3(\varphi)) \quad (a > 0) .$$

4. Aufgabe

10 Punkte (5+5)

(i) Skizzieren Sie die Menge $B \subset \mathbb{R}^2$, welche durch die Kurven

$$xy = 4 , \quad x = y , \quad x = 4$$

begrenzt ist, und berechnen Sie deren Flächeninhalt.

(ii) Seien $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v(x, y, z) = (y, -x, z)$, und S die zweiseitige Schraubenfläche gegeben durch

$$c : [0, 2] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 , \quad (r, \varphi) \mapsto (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), \frac{1}{2\pi}\varphi) .$$

Führen Sie das Integral

$$\int_S v \cdot n \, d\sigma$$

(der Einheitsnormalenvektor n weist ins Äußere von S) auf ein Integral der Form

$$\int_{[0,2]\times[0,2\pi]} g(r, \varphi) \, d(r, \varphi) ,$$

wobei $g : [0, 2] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ stetig ist. Bestimmen Sie anschließend g.

5. Aufgabe

4 Punkte

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, mit Rand $\partial\Omega$, ein beschränktes Gebiet, in dem der Gaußsche Integralssatz gilt, und $u, v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ seien stetig differenzierbare Funktionen. Beweisen Sie, dass für $i \in \{1, 2, 3\}$ die Formel der partiellen Integration gilt:

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx = \int_{\partial\Omega} uv \, n_i \, d\sigma - \int_\Omega v \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx .$$

Gesamtpunktzahl: 50