Lösungen - Analysis III - Oktober-Klausur 2008

1. Aufgabe

10 Punkte (5+5)

(i) Es gilt $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} \{q\}$, d.h. $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ lässt sich als abzählbare Vereinigung einelementiger (disjunkter) Mengen darstellen. Da einelementige Mengen Lebesgue-Nullmengen sind, gilt nach der σ-Additivität des Lebesgue-Maßes:

$$\lambda(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = \lambda(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} \{q\}) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} \lambda(\{q\}) = 0 .$$

(ii) Sind A und B Lebesgue-meßbare Mengen, so auch $A \cap B$, $A \cup B$ und $A \setminus B$, und es gilt

$$\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B) - \lambda(A \cap B) . \tag{1}$$

zu **a)**: Für $A := M_1 \setminus M_2$ und $B := M_2$ ist

$$A \cup B = M_1 \cup M_2 \quad \text{und} \quad A \cap B = \emptyset .$$

Damit liefert (1):

$$\lambda(M_1 \cup M_2) = \lambda(M1 \setminus M_2) + \lambda(M_2) . \tag{2}$$

zu **b)**: Aus den Gleichungen (1) und (2) folgt für $A := M_1$ und $B := M_2$:

$$\lambda(M_1 \cap M_2) = \lambda(M_1) - \lambda(M1 \setminus M_2) .$$

zu **c)**: Wenn man in der Gleichung (2) die Rollen von M_1 und M_2 vertauscht und das Ergebnis mit der ursprünglichen Gleichung (2) kombiniert, so erhält man

$$\lambda(M_2 \setminus M_1) = \lambda(M_1 \setminus M_2) + \lambda(M_2) - \lambda(M_1) .$$

2. Aufgabe

12 Punkte (3+9)

(i) s. Vorlesungsmitschriften.

(ii) **a)** Die Funktionenfolge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert auf $[-1,1]$ punktweise gegen

$$f : [-1,1] \to \mathbb{R} , \quad f(x) := \begin{cases} e^x & \text{für } x \in]-1,1[\setminus \{0\} , \\ 0 & \text{für } x = \pm 1 , \\ 2 & \text{für } x = 0 . \end{cases}$$

b) Die Funktionen f_n sind messbar, da stetig. Ferner gilt

$$|f_n(x)| \leq e^x + 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} , x \in [-1,1] .$$

Die rechte Seite der Ungleichung ist regel-integrierbar auf $[-1,1]$, also auch Lebesgue-integrierbar. Mit der Monotonie des Lebesgue-Integrals folgt dies nun auch für die Funktionen $|f_n|$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Eine weitere Anwendung dieser Monotonie liefert die Integrierbarkeit von f_n auf $[-1,1]$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Nach dem Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz folgt dann die Lebesgue-Integrierbarkeit von f und

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[-1,1]} f_n \, d\lambda = \int_{[-1,1]} f \, d\lambda = \int_{[-1,1]} e^x \, d\lambda \,,$$

wobei hier die Tatsache benutzt wurde, dass f λ-fast gleich der Funktion $x \mapsto e^x$ ist und deshalb ihre Integrale gleich sind. Letztere Funktion ist regel-integrierbar auf $[-1,1]$ und damit

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[-1,1]} f_n \, d\lambda = \int_{[-1,1]} e^x \, d\lambda = \int_{-1}^{1} e^x \, dx = e - e^{-1} \,.$$

3. Aufgabe

12 Punkte (4+8)

(i) Wegen $dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0$ gilt

$$\begin{aligned} \sigma_1 \wedge \sigma_2 = &\ (x\,dx + y\,dy + dz) \wedge (-x\,dx + y\,dy) \\ = &\ (x\,dx) \wedge (y\,dy) + (y\,dy) \wedge (-x\,dx) + (dz) \wedge (-x\,dx) + dz \wedge (y\,dy) \\ = &\ 2xy\,dx \wedge dy + x\,dx \wedge dz - y\,dy \wedge dz \,. \end{aligned}$$

Nach dem Lemma von Poincaré ($\mathbb{R}^3$ ist konvex) ist ω exakt, falls geschlossen, d.h. $d\omega = 0$. Wegen

$$d\omega = d(2xy) \wedge dx \wedge dy + d(x) \wedge dz \wedge dx - d(y) \wedge dz \wedge dy = 0$$

ist also ω exakt.

(ii) Da $]0,\infty[\times\mathbb{R}$ sternförmig ist, reicht es nachzuprüfen, für welches α das Vektorfeld v die Integrabilitätsbedingung erfüllt.

Nachprüfen der Integrabilitätsbedingung: Für alle $(x,y) \in]0,\infty[\times\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial x} &\iff -\frac{2y}{x^2}\cos(\frac{y}{x}) + \frac{y^2}{x^3}\sin(\frac{y}{x}) = -(1+\alpha)\frac{y}{x^2}\cos(\frac{y}{x}) + \frac{y^2}{x^3}\sin(\frac{y}{x}) \\ &\iff \alpha = 1\,. \end{aligned}$$

Also ist v ein Gradientenfeld genau dann, wenn $\alpha = 1$.

Stammfunktion

Gesucht ist ein stetig differenzierbares Skalarfeld $\Phi :]0,\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\nabla\Phi = v$.

Es gilt

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = v_1 \ \Rightarrow \ \Phi(x,y) = \int v_1(x,y)\,dx = x + y\sin(\frac{y}{x}) + c(y)\,,$$

mit c unabhängig von der Variablen x. Wegen $\frac{\partial\Phi}{\partial y} = v_2$ gilt

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \sin(\frac{y}{x}) + \frac{y}{x}\cos(\frac{y}{x}) + c'(y) \stackrel{!}{=} \sin(\frac{y}{x}) + \frac{y}{x}\cos(\frac{y}{x}),$$

also ist c konstant. Eine Stammfunktion von v wäre dann $\Phi(x,y) = x + y\sin(\frac{y}{x})$.

<u>Wegintegral</u>: Es gilt $\gamma(1) = (1,\pi)^T$, $\gamma(2) = (2,\pi)^T$, also

$$\int_\gamma v(x,y)\cdot d(x,y) = \Phi(\gamma(2)) - \Phi(\gamma(1)) = 2 - \pi\sin(\frac{\pi}{2}) - (1 - \pi\sin(\pi)) = 1 - \pi\,.$$

4. Aufgabe

10 Punkte (4+6)

(i) Die Bogenlänge L der gesuchten Raumkurve zwischen den Punkten $\gamma(0) = (-1,0,0)^T$ und $\gamma(1) = (1,2,\sqrt{5})^T$ lässt sich bestimmen durch

$$\begin{aligned} L = \int_{\gamma([0,1])} dx = \int_{[0,1]} |\gamma'(t)|\,dt = &\int_0^1 \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3\sqrt{t} \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} \right| dt \\ = &\int_0^1 \sqrt{4 + 9t + 5}\,dt \\ = &\int_0^1 3\sqrt{1+t}\,dt \\ = &\ 2[(1+t)^{\frac{3}{2}}]_{t=0}^{t=1} = 2(2\sqrt{2} - 1)\,. \end{aligned}$$

(ii) Die Fläche S, deren Inhalt bestimmt werden soll, ist explizit dargestellt durch die Abbildung $f(x,y) = c - \frac{1}{2}x^2$. Eine Parametrisierung von S ist gegeben durch

$$c : K \to \mathbb{R}^3\,, \quad c(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix},$$

wobei $K := \{(x,y) \in \mathbb{R} \,|\, 0 \le x \le \sqrt{3},\ 0 \le y \le x\}$. Dann gilt für das Oberflächenelement $d\sigma$:

$$d\sigma = |\frac{\partial c}{\partial x} \times \frac{\partial c}{\partial y}|\,dx\,dy = \sqrt{1 + f_x^2(x,y) + f_y^2(x,y)}\,dx\,dy = \sqrt{1+x^2}\,dx\,dy\,,$$

und somit

$$\begin{aligned} I(S) = \int_S d\sigma = \int_c d\sigma = &\int_0^{\sqrt{3}} \int_0^x \sqrt{1+x^2}\,dy\,dx \\ = &\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2}\,dx \\ = &\ \frac{1}{3}\Big[(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\Big]_{x=0}^{x=\sqrt{3}} = \frac{7}{3}\,. \end{aligned}$$

5. Aufgabe

6 Punkte

Nach dem Gaußschen Integralsatz gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\partial A} F \cdot n \, d\sigma &= \int_A \operatorname{div} F(x,y,z) \, d(x,y,z) \\
&= \int_A |(x,y,z)^T|^2 \, d(x,y,z) \\
&\overset{(\star)}{=} \int_{[0,1]\times[0,2\pi]\times[0,\pi/2]} r^2 r^2 \sin(\theta) \, d(r,\phi,\theta) \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^4 \sin(\theta) \, dr d\phi d\theta = \frac{2\pi}{5} \,,
\end{aligned}$$

wobei wir bei $(\star)$ eine Transformation in Kugelkoordinaten durchgeführt haben.