TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 08
Institut für Mathematik 02.10.2008
Prof. Dr. F. Tröltzsch / Dipl.-Math. V. Dhamo

Nachklausur Analysis III

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Keine Hilfsmittel (Handy, Taschenrechner, etc.) zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4-Blättern abzugeben. Für jede Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Auf jedes Blatt Name und Matrikelnummer schreiben! Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an bzw. begründen Sie ihre Antworten.

Die Bearbeitungszeit beträgt **110 Minuten**.

Tip: Beginnen Sie mit den Aufgaben(teilen), die Ihnen am leichtesten fallen. Die Aufgaben sind nach Themengebieten geordnet.

Die Klausur ist mit **25** von **50** Punkten bestanden.

1	2	3	4	5	$\sum$

1. Aufgabe

10 Punkte (5+5)

(i) Begründen Sie, warum die Teilmenge der rationalen Zahlen von $[0,1]$ das Lebesgue-Maß Null hat.

(ii) Es seien M_1 und M_2 Lebesgue-meßbare Mengen, und es seien ihre Maße $\lambda(M_1)$, $\lambda(M_2)$ und $\lambda(M_1 \setminus M_2)$ bekannt ($\lambda =$ Lebesgue-Maß in $\mathbb{R}$). Wie kann man damit

$$\text{a) } \lambda(M_1 \cap M_2), \qquad \text{b) } \lambda(M_1 \cup M_2) \quad \text{und} \quad \text{c) } \lambda(M_2 \setminus M_1)$$

berechnen?

2. Aufgabe

12 Punkte (3+9)

(i) Wie lautet der „Satz von der majorisierten Konvergenz“ für eine punktweise konvergente Folge von Lebesgue-integrierbaren Funktionen?

(ii) Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = (1 - x^{2n})(e^x + e^{-nx^2}).$$

a) Untersuchen Sie die Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ auf punktweise Konvergenz.

b) Begründen Sie, warum f_n für $n \in \mathbb{N}$ Lebesgue-integriebar auf $[-1,1]$ ist, und bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty} \int_{[-1,1]} f_n \, d\lambda$ ($\lambda =$ Lebesgue-Maß in $\mathbb{R}$).

3. Aufgabe

12 Punkte (4+8)

(i) Es seien $\sigma_1 := x\,dx + y\,dy + dz$, $\sigma_2 := -x\,dx + y\,dy$ 1-Formen in $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die 2-Form $\omega := \sigma_1 \wedge \sigma_2$. Entscheiden Sie, ob ω exakt ist.

(ii) Für welches $\alpha \in \mathbb{R}$ ist das Vektorfeld $v :]0,\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$$v(x,y) = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{y^2}{x^2}\cos(\dfrac{y}{x}) \\ \alpha\sin(\dfrac{y}{x}) + \dfrac{y}{x}\cos(\dfrac{y}{x}) \end{pmatrix},$$

ein Gradientenfeld. Berechnen Sie für solches α das Wegintegral von v entlang des Weges

$$\gamma : [1,2] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (t, g(t))^T,$$

$$g : [1,2] \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} (t-1)^3 + \pi, & 1 \le t \le \dfrac{3}{2}, \\ -(t-2)^3 + \pi, & \dfrac{3}{2} < t \le 2. \end{cases}$$

4. Aufgabe

10 Punkte (4+6)

(i) Berechnen Sie die Bogenlänge folgender Raumkurve

$$\gamma : t \mapsto (2t-1, 2t^{3/2}, \sqrt{5}t)^T$$

zwischen den Punkten $(-1,0,0)^T$ und $(1,2,\sqrt{5})^T$.

(ii) Die Ebenen $y = 0$, $x = \sqrt{3}$, $y = x$ begrenzen einen prismatischen Körper, der unten von der xy-Ebene und oben von der parabolischen Zylinderfläche $z = c - \frac{1}{2}x^2$ begrenzt werde ($c > 0$). Berechnen Sie den Inhalt der oberen Begrenzungsfläche.

5. Aufgabe

6 Punkte

Sei A die obere Hälfte der Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$ und $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld $F(x,y,z) = (xz^2, x^2y - z^3, 2xy + y^2z)^T$. Berechnen Sie mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes

$$\int_{\partial A} F \cdot n \, d\sigma \,.$$

Gesamtpunktzahl: 50