1. Übungsblatt Analysis III

Übungsaufgaben

1. Aufgabe
Wir beweisen Satz 1.7 aus der Vorlesung.

2. Aufgabe
Wir zeigen:

a) Jede Elementarmenge ist Vereinigung endlich vieler disjunkter Quader.
b) Die Menge $\mathfrak{F}^d$ der elementargeometrischen Figuren aus $\mathbb{R}^d$ ist ein Ring, aber kein σ-Ring.

3. Aufgabe
Man beweise, dass das System der offenen/abgeschlossenen/kompakten Mengen des $\mathbb{R}^d$ die σ-Algebra der *Borelschen Mengen* erzeugt.

4. Aufgabe
Seien $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton steigende Funktion und $\mu : \mathfrak{F}^1 \to \mathbb{R}_+$ definiert durch

$$\begin{aligned} \mu([a,b)) &= \alpha(b-) - \alpha(a-)\,, \\ \mu([a,b]) &= \alpha(b+) - \alpha(a-)\,, \\ \mu((a,b]) &= \alpha(b+) - \alpha(a+)\,, \\ \mu((a,b)) &= \alpha(b-) - \alpha(a+) \text{ sowie} \\ \mu(A) &= \mu(Q_1) + \cdots + \mu(Q_n)\,, \end{aligned}$$

wobei $A = \bigcup_{i=1}^n Q_i$, $n \in \mathbb{N}$ und $\{Q_i\}_{i=1,\dots,n}$ eine endliche Familie durchschnittsfremder Intervalle ist.
Dann ist μ *regulär*, d.h. für jedes $A \in \mathfrak{F}^1$ und jedes $\epsilon > 0$, existieren $F, G \in \mathfrak{F}^1$, F abgeschlossen und G offen, so dass $\mu(G) - \epsilon \le \mu(A) \le \mu(F) + \epsilon$.

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe
Zeige die Wohldefiniertheit des Inhalts $\lambda : \mathfrak{F}^d \to [0, \infty[$ auf dem Ring $\mathfrak{F}^d$ der elementargeometrischen Figuren (vgl. Beispiel 1.10 aus der Vorlesung):
Ist $A \subset \mathbb{R}^d$ eine Elementarmenge und $A = \bigcup_{i=1}^k P_i = \bigcup_{j=1}^l Q_j$, wobei P_i, $i = 1, \dots, k$, (bzw. Q_j, $j = 1, \dots, l$) paarweise disjunkte achsenparallele Quader im R^d sind, so gilt

$$\sum_{i=1}^k \lambda(P_i) = \sum_{j=1}^l \lambda(Q_j)\,.$$

2. Aufgabe
Sei X eine beliebige unendliche Menge und

$$\mathfrak{A} := \{A \subset X \mid A \text{ oder } X \setminus A \text{ sind endlich.}\}\,.$$

Man zeige, dass $\mathfrak{A}$ eine (Mengen-)Algebra ist, aber keine σ-Algebra.

3. Aufgabe
Für beliebige Mengen A, B, C sowie A_i, B_i, $i = 1, 2$, zeige, dass

a) $A\backslash B \subset (A\backslash C) \cup (C\backslash B)$,

b) $(A_1 \cup B_1) \triangle (A_2 \cup B_2) \subset (A_1 \triangle A_2) \cup (B_1 \triangle B_2)$

4. Aufgabe

Es sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Teilmengen einer beliebigen nichtleeren Menge Ω. Der obere und der untere Mengenlimes werden definiert durch

$$A^* := \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{bzw.} \quad A_* := \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \,.$$

Beschreibe (anschaulich), welche Elemente in A^* bzw. A_* liegen und

a) Beweise die Gültigkeit der Inklusion $A_* \subset A^*$;

b) Zerlege das Intervall $[0,1)$ nacheinander in $m = 1, 2, \ldots$ gleich lange Intervalle $[\frac{k-1}{m}, \frac{k}{m})$, $k = 1, \ldots, m$ und nummeriere die so entstandenen Intervalle A_j fortlaufend durch, also $A_1 = [0,1)$, $A_2 = [0, \frac{1}{2})$, $A_3 = [\frac{1}{2}, 1)$, $A_4 = [0, \frac{1}{3})$, $A_5 = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ usw. Bestimme für diese Mengenfolge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Mengenlimites A_* und A^*.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (5 Punkte)

Es seien A und B Elementarmengen des $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass $A \cup B$, $A \cap B$, $A\backslash B$ und $A \triangle B$ ebenfalls Elementarmengen sind.

2. Aufgabe (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Vereinigung zweier σ-Algebren i.A. keine σ-Algebra ist.

3. Aufgabe (5 Punkte)

Es sei $\mathfrak{A}_i$ eine σ-Algebra auf Ω_i, $i = 1, 2$, und sei $T : \Omega_1 \to \Omega_2$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

a) $\{T^{-1}(B) \,|\, B \in \mathfrak{A}_2\}$ ist eine σ-Algebra auf Ω_1.

b) $\{B \subset \Omega_2 \,|\, T^{-1}(B) \in \mathfrak{A}_1\}$ ist eine σ-Algebra auf Ω_2.

4. Aufgabe (5 Punkte)

Sei μ ein endlicher Inhalt auf einem Ring $\mathfrak{R}$.

a) Zeigen Sie, dass für $A, B \in \mathfrak{R}$ gilt:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

b) Seien $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ und $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{R}$.
Zeigen Sie mit vollständiger Induktion und Teil a):

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{1\leq i_1,\ldots,i_k\leq n} (-1)^{k+1} \mu(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})\,.$$

Gesamtpunktzahl: 17