2. Übungsblatt Analysis III

Übungsaufgaben

1. Aufgabe

(Strukturen Borelscher Mengen in $\mathbb{R}$)

(i) Wir zeigen, dass sich jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ in genau einer Weise als Vereinigung abzählbar vieler paarweise disjunkter offener Intervalle, den sogenannten *Komponenten* der Menge, darstellen lässt.

(ii) Wir diskutieren, dass das Cantorsche Diskontinuum eine perfekte Menge ist.

2. Aufgabe

(i) Es sei $A \subset \mathbb{R}^d$ gegeben sowie $\varepsilon > 0$. Wir weisen die Existenz einer offenenen Menge $G \supset A$ nach mit $\mu^*(G) \leq \mu^*(A) + \varepsilon$.

(ii) Wir beweisen, das zu jeder Lebesgue-messbaren Menge $E \subset \mathbb{R}^d$ und jedem $\varepsilon > 0$ eine offene Menge $G \supset E$ existiert mit $\lambda^d(G \setminus E) \leq \varepsilon$ (λ^d = Lebesgue-Maß in $\mathbb{R}^d$).

(iii) Ist $E \subset \mathbb{R}^d$ Lebesgue-messbar, dann existieren Borelmengen H_1, H_2 mit $H_1 \subset E \subset H_2$ und $\lambda^d(H_2 \setminus E) = \lambda^d(E \setminus H_1) = 0$.

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Sei $\mathfrak{R}$ ein Ring über einer Grundmenge Ω und $\mu : \mathfrak{R} \to \mathbb{R}$ additiv. Für $E \in \mathfrak{R}$ sei

$$|\mu|(E) := \sup\{\sum_{k=1}^{n} |\mu(E_k)| \; ; \; n \in \mathbb{N}, E_k \in \mathfrak{R} \text{ paarweise disjunkt}, \; E_k \subset E\}\,.$$

(i) Zeigen Sie, dass $|\mu| : \mathfrak{R} \to [0, \infty]$ additiv ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $|\mu|$ σ-additiv ist, falls μ σ-additiv ist.

2. Aufgabe

Sei $\mathfrak{R}$ ein Ring über einer Grundmenge Ω, $\mu : \mathfrak{R} \to [0, \infty]$ additiv und μ^* das zugehörige äußere Maß . Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Es ist $\mu^* = \mu$ auf $\mathfrak{R}$.

(ii) μ ist subadditiv auf $\mathfrak{R}$.

(iii) μ ist σ-additiv auf $\mathfrak{R}$.

(iv) Für jede Folge $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{R}$ gilt: $\lim\limits_{k\to\infty} \mu^*(E_k) = 0 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{k\to\infty} \mu(E_k) = 0$.

3. Aufgabe

Geben Sie ein Beispiel für ein Tripel $(\Omega, \mathfrak{R}, \mu)$ an, bestehend aus einer Grundmenge Ω, einem Ring $\mathfrak{R}$ über Ω und einem Inhalt $\mu : \mathfrak{R} \to [0, \infty]$, so dass ein $E \in \mathfrak{R}$ existiert, für das gilt $\mu^*(E) < \mu(E)$. Dabei ist μ^* das zu μ gehörige äußere Maß. Nach Aufgabe 2 kann dann μ nicht σ-additiv auf $\mathfrak{R}$ sein.

4. Aufgabe
Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum. Beweisen Sie:
$(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ist genau dann vollständig, wenn aus

$$\underline{A} \subseteq A \subseteq \overline{A}, \quad \underline{A}, \overline{A} \in \mathfrak{A} \quad \text{und} \quad \mu(\underline{A}) = \mu(\overline{A})$$

folgt, dass $A \in \mathfrak{A}$.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (4 Punkte)
Überprüfen Sie, ob die angegebenen Mengen $M \subset \mathbb{R}^d$ in der σ-Algebra der Borelschen Mengen liegen und berechnen Sie ggf. deren d-dimensionales Lebesgue-Borel-Maß.

(i) $M := \{x\}$ für $x \in \mathbb{R}^d$.

(ii) M ist eine abzählbare Teilmenge des $\mathbb{R}^d$.

(iii) $M := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1,\ x \text{ irrational}\}$.

(iv) $M := \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ x \text{ irrational}\}$.

(v) $M := \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid x = y\}$.

2. Aufgabe (4 Punkte)

(i) Zeige, dass es eine Folge $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset]0, 1[$ von offenen Intervallen gibt, so dass $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \subset]0, 1[$ alle rationalen Zahlen in $]0, 1[$ überdeckt und $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^1(I_n) \leq \frac{1}{2}$ gilt (λ^1 = Lebesgue-Maß in $\mathbb{R}$).

(ii) Zeige, dass für solch eine Folge von offenen Intervallen gilt:

(a) $B := [0, 1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}$.
(b) $\mathring{B} = \emptyset$.
(c) B ist keine Nullmenge.

3. Aufgabe (4 Punkte)
Seien $\mu_1, \mu_2 : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to [0, \infty]$ Mengenfunktionen mit

$$\mu_1(A) = \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ beschränkt}, \\ 1, & \text{falls } A \text{ unbeschränkt}, \end{cases}$$

$$\mu_2(A) = \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ abzählbar}, \\ 1, & \text{falls } A \text{ überabzählbar}. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(i) μ_1 ist weder additiv, noch subadditiv.

(ii) μ_2 ist nicht additiv, aber subadditiv.

4. Aufgabe (3 Punkte)
Sei $\mathfrak{R}$ ein Ring auf einer Grundmenge Ω und $\mu : \mathfrak{R} \to [0, \infty]$ additiv. Zeigen Sie für das äußere Maß μ^* und eine beliebige Teilmenge $A \subset \Omega$:

Falls $A \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} E_n$ mit $E_n \in \mathfrak{R}$ und $E_n \subset E_{n+1}$, so folgt $\mu^*(A) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n)$.

5. Aufgabe* (4 Punkte)
Eine Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Prämaßen auf einem Ring $\mathfrak{R}$ sei *isoton*, d.h. $\mu_n(A) \leq \mu_{n+1}(A)$ für alle $A \in \mathfrak{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$\mu(A) := \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(A), \quad A \in \mathfrak{R},$$

ein Prämaß auf $\mathfrak{R}$ definert.

Gesamtpunktzahl: 19