TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN Sommersemester 2008
Institut für Mathematik
Prof. Dr. F. Tröltzsch / V. Dhamo Abgabe: 12.05.-16.05.08 im Tutorium
http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SoSe08/Analysis3

3. Übungsblatt Analysis III

Die Klausur findet am **Donnerstag**, den **17.07.** in der Zeit **08-10 Uhr** im Hörsaal **H 2013** statt.

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Für ein Prämaß μ auf einem Ring $\mathfrak{R}$ in Ω definiere man

$$\overline{\mathfrak{R}} := \{A \in \mathcal{P}(\Omega) \,|\, A \cap R \in \mathfrak{R} \text{ für alle } R \in \mathfrak{R}\}$$

und

$$\overline{\mu}(A) := \sup\{\mu(R) \,|\, R \subset A, R \in \mathfrak{R}\}, \quad A \in \overline{\mathfrak{R}}\,.$$

Dann ist $\overline{\mathfrak{R}}$ eine Algebra in Ω mit $\mathfrak{R} \subset \overline{\mathfrak{R}}$. Ferner ist $\overline{\mu}$ ein Prämaß auf $\overline{\mathfrak{R}}$, welches μ fortsetzt.

2. Aufgabe

Sei $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ die σ-Algebra der Borelschen Mengen des $\mathbb{R}^d$. Zeigen Sie:

(i) Für $A \in \mathfrak{B}(R^m)$ und $B \in \mathfrak{B}(R^n)$ ist $A \times B \in \mathfrak{B}(R^{m+n})$.

(ii) Sind $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Borel-messbare Funktionen, so ist die durch

$$h(x,y) = f(x) + g(y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$

definierte Funktion $h : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$ ebenfalls Borel-messbar.

3. Aufgabe

Es sei S eine σ-Algebra auf $\mathbb{Q}$ und $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ eine injektive messbare Funktion. Dann gilt $S = \mathcal{P}(\mathbb{Q})$.

4. Aufgabe

Das μ-Integral einer Elementarfunktion $f : \Omega \to [0,\infty)$ ist unabhängig von deren Normaldarstellung.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (4 Punkte)

Zeigen Sie: Der Graph $\{(x, f(x)) \,|\, x \in \mathbb{R}^{d-1}\}$ einer stetigen Funktion $f : \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$ ist eine λ^d-Nullmenge.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Ein Maß μ auf einer σ-Algebra über einer Menge Ω wird *Wahrscheinlichkeitsmaß* genannt, wenn $\mu(\Omega) = 1$ gilt.

Gegeben seien eine beliebige nichtleere Grundmenge Ω, eine σ-Algebra $\mathfrak{A}$ in Ω und ein Punkt $x \in \Omega$. Man zeige:

(i) Durch

$$\delta_x(A) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \notin A\,, \end{cases} \qquad A \in \mathfrak{A}$$

wird ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathfrak{A}$ definiert. Dieses Maß heißt *Dirac-Maß.*

(ii) Sei $\{x\} \in \mathfrak{A}$. Das Dirac-Maß δ_x aus (i) ist genau dann vollständig, wenn $\mathfrak{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

3. Aufgabe * (4 Punkte)

Seien $E := [0, 1]$ und λ^d das Lebesgue-Maß auf der σ-Algebra $\mathfrak{B}(E^d)$ der Borelschen Mengen des E^d. Zeigen Sie

(i) Für $A \in \mathfrak{B}(E^m)$ und $B \in \mathfrak{B}(E^n)$ ist $\lambda^{n+m}(A \times B) = \lambda^m(A) \cdot \lambda^n(B)$.

(ii) Das Maß λ^{n+m} ist das einzige Maß auf $\mathfrak{B}(E^{n+m})$, das die Aussage (i) erfüllt.

Hinweis zu (i): Zeigen Sie, dass die Aussage für achsenparallele Quader A und B richtig ist. Überzeugen Sie sich davon, dass für achsenparallele Quader $A \subseteq E^m$ durch

$$\mathfrak{D}_A := \{B \in \mathfrak{B}(E^n) \,|\, \lambda^{n+m}(A \times B) = \lambda^m(A) \cdot \lambda^n(B)\}$$

ein Dynkin-System definiert wird. Wenden Sie den Hauptsatz über Dynkin-Systeme an.

4. Aufgabe (4 Punkte)

(i) Beweisen Sie:

  (a) Jede monotone Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist Borel-messbar.

  (b) Die Ableitung einer überall differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist Borel-messbar.

(ii) Man zeige anhand eines Beispiels, dass aus der Messbarkeit von $|f|$ i.A. nicht die Messbarkeit der Funktion f folgt.
Man darf dabei von der Existenz nicht-messbarer Mengen ausgehen.

Gesamtpunktzahl: 16