4. Übungsblatt Analysis III

Übungsaufgaben

Wegen Ausfall werden die Übungsaufgaben vom 2. Übungsblatt diskutiert.

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Wir betrachten die nicht-negativen messbaren Funktionen $f_1, f_2 : [0,1] \to [0,\infty)$,

$$f_1(x) := x\,; \quad f_2(x) := 1 - x\,.$$

Da $f_1 + f_2 = 1$, ist dann $s : [0,1] \to [0,\infty)$, $s(x) := 1$ eine Elementarfunktion mit $s \leq f_1 + f_2$.
Zeigen Sie, dass es keine Elementarfunktionen $s_1, s_2 : [0,1] \to [0,\infty)$ gibt derart, dass $s_1 \leq f_1$, $s_2 \leq f_2$ und $s_1 + s_2 = s$.

2. Aufgabe

Betrachen Sie den Maßraum $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \xi)$ mit dem *Zählmaß* ξ,

$$\xi(A) := \begin{cases} |A|, & \text{falls } A \text{ endlich} \\ +\infty, & \text{sonst,} \end{cases} \qquad A \subset \mathbb{N}\,.$$

Jede Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ kann via $f \mapsto (f(1), f(2), \dots)$ mit einer Folge reeller Zahlen identifiziert werden. Welche Zahlenfolgen entsprechen den

(i) messbaren Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$?

(ii) Elementarfunktionen $s : \mathbb{N} \to [0,\infty)$ mit $\int_{\mathbb{N}} s\,d\xi < \infty$?

(iii) nichtnegativen Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $\int_{\mathbb{N}} f\,d\xi < \infty$?

(iv) integrierbaren Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$?

3. Aufgabe

Es sei Ω eine nichtleere Menge, $x \in \Omega$ und $\delta_x : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ das aus dem 3. Übungsblatt bekannte Dirac-Maß in x auf Ω. Zeigen Sie, dass für jede Funktion $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ gilt:

$$\int_\Omega f\,d\delta_x = f(x)\,.$$

4. Aufgabe

Entscheiden Sie, welche der Funktionen $f_i : \Omega_i \to \mathbb{R}$ bezüglich des Lebesgue-Borel-Maßes über $\Omega_i \subset \mathbb{R}$ integrierbar sind und berechnen Sie gegebenenfalls das Integral.

$$\Omega_1 = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad f_1(x) = [2\cos(x)]\,; \qquad \Omega_2 = (0,1), \quad f_2(x) = \frac{\cos(x)}{x^3}\,;$$
$$\Omega_3 = \mathbb{R}, \quad f_3(x) = \begin{cases} \cos^2(x), & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

Dabei wird mit $[x]$ die größte natürliche Zahl kleiner gleich x bezeichnet.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die im Beweis zum Satz 1.42 konstruierte Funktionsfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist und punktweise gegen f konvergiert.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ messbar und die Menge $M := \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq 0\}$ keine λ^d-Nullmenge ($\lambda^d =$ Lebesgue-Maß in $\mathbb{R}^d$). Zeigen Sie:

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \, d\lambda^d > 0 \, .$$

Hinweis: Betrachten Sie die Mengen $M_0 := \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \geq 1\}$ und $M_n := \{x \in \mathbb{R}^d : \frac{1}{n+1} \leq f(x) < \frac{1}{n}\}$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Gegeben sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} \, , & x \geq \pi \\ 0 \, , & x < \pi \, . \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass folgender Grenzwert existiert: $\lim\limits_{a\to\infty} \displaystyle\int_0^a f(x) \, dx$.

(ii) Untersuchen Sie, ob f Lebesgue-integrierbar ist.

4. Aufgabe (5 Punkte)

Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und λ das Lebesgue-Borelsche Maß auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(i) Ist f integrierbar, so ist f fast überall endlich.

(ii) Seien f und g stetig. Gilt $f = g$ fast überall, dann gilt $f = g$ auf ganz $\mathbb{R}$.

Gesamtpunktzahl: 16