5. Übungsblatt Analysis III

TERMINÄNDERUNG: Die Klausur findet am **Donnerstag**, den **17.07.** in der Zeit **14:00 - 16:00** im Hörsaal **MA 001** statt.

Übungsaufgaben

1. Aufgabe

Wir zeigen, dass zu jeder Lebesgue-messbaren Menge $E \subset \mathbb{R}^d$ zwei Borelmengen $H_1, H_2 \subset \mathbb{R}^d$ existieren mit $H_1 \subset E \subset H_2$ und $\lambda^d(H_2 \backslash E) = \lambda^d(E \backslash H_1) = 0$.

2. Aufgabe

Wir beweisen die Integrationsregeln für nicht-negative Funktionen (Satz 1.45 aus der Vorlesung).

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar und $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(t) := \int_{[0,t]} f \, d\lambda \,.$$

Zeigen Sie, dass g gleichmäßig stetig ist.

2. Aufgabe

Es seien $a_n \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} a_n & \text{für } n-1 < x < n \quad (n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}) \\ 0 & \text{für } x < 0 \,. \end{cases}$$

Zeigen Sie: f ist genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert.

Dann ist $\int f \, d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

3. Aufgabe

Man betrachte folgende Beispiele von Funktionenfolgen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf den Defitionsbereichen $D \subset \mathbb{R}$:

(i) Sei $D = [0, 1]$, $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Abzählung der rationalen Zahlen in D und $f_n : D \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(q_i) = 1 \text{ für } i = 1, \ldots, n \,, \qquad \text{und} \qquad f_n(x) = 0 \text{ sonst} \,.$$

(ii) Sei $D = \mathbb{R}$ und $f_n : D \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \text{ für } -n \leq x \leq n \,, \qquad \text{und} \qquad f_n(x) = 0 \text{ sonst} \,.$$

(iii) Sei $D = [0, 1]$ und $f_n : D \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) = n \text{ für } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \,, \qquad \text{und} \qquad f_n(x) = 0 \text{ sonst} \,.$$

Welche Voraussetzungen der Sätze von Beppo Levi und Lebesgue und des Lemmas von Fatou werden in diesen Beispielen erfüllt und welche nicht?

4. Aufgabe

Sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $f \in L_1(\lambda^d)$ und $M \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$. Dann ist $f\chi_M \in L_1(\lambda^d)$.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (4 Punkte)

Sei für $s > 0$ und $k \in \mathbb{N}$:

$$f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad f_k(x) = \begin{cases} \frac{k^s x}{1+k^2 x} & \text{für } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Für welche s

(i) ist die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergent?

(ii) besitzt $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine integrierbare Majorante?

(iii) sind Integration und Grenzübergang vertauschbar?

2. Aufgabe (4 Punkte)

Man beweise oder widerlege folgende Aussagen:

(i) Sei $(\mathbb{R}, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μ-integrierbare Funktionen. Dann ist auch $f \cdot g$ μ-integrierbar.

(ii) Sei $D \subset \mathbb{R}^d$ Lebesgue-messbar mit $\lambda^d(D) > 0$, und seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ λ^d-integrierbare Funktionen. Stimmen f und g auf einer dichten Teilmenge von D überein, so sind ihre Integrale gleich.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f, f_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ nicht-negative μ-integrierbare Funktionen.

(i) Zeigen Sie die folgende Implikation:

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f|\, d\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu = \int_\Omega f\, d\mu\,.$$

(ii) Es gelte

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \quad \text{fast überall} \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu = \int_\Omega f\, d\mu\,.$$

Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f|\, d\mu = 0$$

Hinweis : Wenden Sie das Lemma von Fatou auf die Folge $f_n + f - |f_n - f|$ an.

4. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Funktionen sind Lebesgue-integrierbar und welche nicht? Geben Sie bei den integrierbaren den Wert des Integrals an.

(i) $f : [0, \infty) \to \overline{\mathbb{R}}$, $f(x) = x^\alpha$.

(ii) $g : [0, 1] \to \overline{\mathbb{R}}$, $f(x) = x^\alpha$.

(iii) $\chi_{\mathbb{Q}}$, $\chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$, $\chi_{[0,1]\setminus\mathbb{Q}}$.

Gesamtpunktzahl: 16