TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
Institut für Mathematik
Prof. Dr. F. Tröltzsch / V. Dhamo
Sommersemester 2008
Abgabe: 02.06.-06.06.08 im Tutorium
http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SoSe08/Analysis3

6. Übungsblatt Analysis III

Die Klausur findet am **Donnerstag**, den **17.07.** in der Zeit **14:00 - 16:00** im Hörsaal **MA 001** statt.
Die Vorlesung am **Dienstag**, den **03.06.**, findet im Raum **MA 004** statt.

Übungsaufgaben

1. Aufgabe
Wir diskutieren nicht-messbare Funktionen.

2. Aufgabe
Das Lebesgue-Integral eignet sich besser zum Auffinden von Stammfunktionen als das Riemann-Integral.

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe
Sei $f_n = n\chi_{]0,1/n[}$. Zeigen Sie, dass die Folge (f_n) punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert, und dass es keine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, so dass f_n in $L_p(\lambda)$ gegen f konvergiert.
(Also impliziert die punktweise Konvergenz nicht die Konvergenz in der $\|\cdot\|_p$-Norm.)

2. Aufgabe
Es seien $a, b > 0$ und $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x/a)^2 + (y/b)^2 \leq 1\}$.

(i) Bestimmen Sie $M_y := \{x \in \mathbb{R} \,|\, (x, y) \in M\}$ für $y \in \mathbb{R}$.

(ii) Berechnen Sie $\lambda^2(M)$.

3. Aufgabe
Berechnen Sie

(i) $V = \displaystyle\int_B f \, d\lambda^2$, wobei $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x, y \leq 1\}$, $f(x, y) = 1 + x + y$.

(ii) das λ^3-Maß der Teilmenge des $\mathbb{R}^3$, die von der folgenden Fläche begrenzt wird:

$$x + y + z = 6, x = 0, z = 0, x + 2y = 4\,.$$

4. Aufgabe
Sei

$$f : [-1, 1]^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}\,.$$

Zeigen Sie, dass $f \notin L_1([-1, 1], \lambda^2)$ ist und trotzdem gilt

$$\int_{[-1,1]} \left(\int_{[-1,1]} f(x, y) \, d\lambda(x) \right) d\lambda(y) = \int_{[-1,1]} \left(\int_{[-1,1]} f(x, y) \, d\lambda(y) \right) d\lambda(x)\,.$$

Hausaufgaben

1. Aufgabe (2 Punkte)

Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $p > 1$ und q der zu p konjugierte Exponent, $1/p + 1/q = 1$. Seien $f, f_n \in L_p(\mu)$, $n \in \mathbb{N}$. Die Folge (f_n) *konvergiert schwach* gegen f, geschrieben $f_n \rightharpoonup f$, falls für alle $g \in L^q(\mu)$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n g \, d\mu = \int_\Omega f g \, d\mu \, .$$

Zeigen Sie, dass die Konvergenz von (f_n) gegen f bezüglich der $\|\cdot\|_p$-Norm (die sogenannte *starke Konvergenz*) die schwache Konvergenz von (f_n) gegen f impliziert.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $k_n \in \mathbb{N}$ die eindeutig bestimmte Zahl, für die gilt $2^{k_n} \leq n < 2^{k_n+1}$ (d.h. k_n ist die Anzahl der Stellen von n im Dualsystem minus Eins),

$$I_n = [n2^{-k_n} - 1, (n+1)2^{-k_n} - 1]$$

und $f_n = \chi_{I_n}$. Skizzieren Sie f_n für $n \in \{0, \ldots, 5\}$, und zeigen Sie, dass die Folge (f_n) in $L_p(\lambda)$ gegen Null konvergiert (λ = Lebesgue-Maß in $\mathbb{R}$), aber die Folge $(f_n(x))$ konvergiert für kein $x \in [0,1]$. Geben Sie eine Teilfolge an, die punktweise λ-fast überall gegen Null konvergiert.
(Also impliziert die Konvergenz in der $\|\cdot\|_p$-Norm nicht die punktweise Konvergenz.)

3. Aufgabe (4 Punkte)

Es sei e_j der j-te Einheitsvektor im d-dimensionalen euklidischen Raum. Berechnen Sie das Volumen der d-dimensionalen Menge

$$E_d := \left\{ \sum_{j=1}^{d} \alpha_j e_j \,\middle|\, \alpha_j \geq 0, \sum_{j=1}^{d} \alpha_j \leq 1 \right\}.$$

Hinweis: Bestimmen Sie die Schnitte $E_{d,t} = \{x \in \mathbb{R}^{d-1} \,|\, (x,t) \in E_d\}$, $0 \leq t \leq 1$ und wenden Sie das Prinzip von Cavalieri an.

4. Aufgabe (3 Punkte)

Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y-x}{(x+y)^3} & \text{für } x \geq 1, y \geq 1, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Berechnen Sie

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, d\lambda(y) \right) d\lambda(x)\,.$$

Ist $f \in L_1(\lambda^2)$ (λ^2 = Lebesgue-Maß des $\mathbb{R}^2$)? Existieren die obigen iterierten Integrale für $|f|$?

5. Aufgabe (3 Punkte)

Man betrachte auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ das Lebesgue-Maß λ und das Zählmaß ξ, bekannt aus dem 4. Übungsblatt. Sei außerdem die Borelmenge $D := \{(x,x) \,|\, x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ gegeben. Zeigen Sie

$$\iint \chi_D \, d\lambda d\xi \neq \iint \chi_D \, d\xi d\lambda \, .$$

Welche Voraussetzungen im Satz von Fubini sind nicht erfüllt?

Gesamtpunktzahl: 16