TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN Sommersemester 2008
Institut für Mathematik
Prof. Dr. F. Tröltzsch / V. Dhamo Abgabe: 09.06.-13.06.08 im Tutorium
http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SoSe08/Analysis3

7. Übungsblatt Analysis III

Die Klausur findet am **Donnerstag**, den **17.07.** in der Zeit **14:00 - 16:00** im Hörsaal **MA 001** statt.

Übungsaufgaben

1. Aufgabe
Wir beweisen Satz 1.72 zur Volumenberechnung unter Graphen.

2. Aufgabe
Wir diskutieren den Beweis zum Lemma von Sard.

3. Aufgabe
Wir diskutieren Nullmengen des $\mathbb{R}^d$ und ihre Überdeckung durch Würfel.

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe
Seien $A \subset \mathbb{R}^d$ und $f : A \to \mathbb{R}$ beide messbar. Dann ist der Graph von f,

$$G = \{(x, f(x)) \,|\, x \in A\} \subset \mathbb{R}^{d+1},$$

eine λ^{d+1}-Nullmenge.

2. Aufgabe
Berechnen Sie:

(i) den Flächeninhalt des Bereiches, welcher durch die Kurven $y = \ln(x), x - y = 1, y = -1$ begrenzt wird.

(ii) den Flächeninhalt von $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, R_1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R_2, 0 < R_1 < R_2\}$.

(iii) das Volumen des Körpers, der von der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ $(R > 0)$ aus dem Zylinder $x^2 + y^2 \leq \frac{R^2}{4}$ herausgeschnitten wird.

(iv) das Volumen des Kugelsektors vom Radius a und dem Öffnungswinkel 2α.

3. Aufgabe
Sei K ein Kegel mit einem Kreis in der x-y-Ebene um den Nullpunkt und mit Radius R als Grundfläche. Die Spitze des Kegels befinde sich im Punkt $(0, 0, h)$. Der Kegel sei mit einer Masse gefüllt, deren Dichte $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch $\rho(x_1, x_2, x_3) = x_3$ gegeben ist. Bestimmen Sie

(i) die durch

$$M := \int_K \rho(x_1, x_2, x_3) \, d\lambda^3(x_1, x_2, x_3)$$

gegebene *Masse* des Kegels.

(ii) den *Schwerpunkt* $S = (S_1, S_2, S_3)$ des Kegels, dessen Koordinaten durch

$$S_j := \int_K x_j \rho(x_1, x_2, x_3)\, d\lambda^3(x_1, x_2, x_3)$$

für $j = 1, 2, 3$ gegeben sind.

4. Aufgabe

Es sei A eine symmetrische reelle $d \times d$ Matrix und $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-x^T Ax}$. Zeigen Sie, dass f genau dann integrierbar ist, wenn A positiv definit ist. Berechnen Sie in diesem Fall das Integral $\int_{\mathbb{R}^d} f\, d\lambda^d$.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (4 Punkte)

Berechnen Sie (mit Hilfe einer geeigneten Koordinatentransformation)

(i) $\int_B f\, d\lambda^2$, wobei $f(x, y) = x^2$ und $B \subset \mathbb{R}^2$ begrenzt durch $|x| + |y| \leq 1$.

(ii) $\int_B f\, d\lambda^2$, wobei $f(x, y) = x^2 + y^2$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ $(a, b \neq 0)$.

(iii) das Volumen des Körpers, der von dem Körper $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$ aus dem Zylinder $(x - a)^2 + y^2 \leq b^2$ herausgeschnitten wird $(0 < b^2 < a^2)$.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Integrieren Sie $\frac{1}{1+x^2+y^2+z^2}$ über die 3-dimensionale Einheitskugel.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Seien $A \subset \mathbb{R}^d$ kompakt und $p = (p_1, \ldots, p_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1}$ mit $p_{d+1} > 0$. Sei $h : A \times [0, 1] \to \mathbb{R}^{d+1}$, $(a, t) \mapsto t \cdot (a, 0) + (1 - t) \cdot p$.

(i) Beschreiben Sie $h(A \times [0, 1])$ geometrisch.

(ii) Berechnen Sie $\lambda^{d+1}(h(A \times [0, 1]))$.

4. Aufgabe (4 Punkte)

Das Simplex im $\mathbb{R}^d$ mit den Eckpunkten $a_0, a_1, \ldots, a_d$ ist die Menge

$$\{x = a_0 + \sum_{i=1}^{d} t_i(a_i - a_0) \,|\, t_i \geq 0, \sum_{i=1}^{d} t_i \leq 1\}\,.$$

Zeigen Sie: Sein Volumen ist $\dfrac{1}{d!}|\det(a_1 - a_0, \ldots, a_d - a_0)|$.

Hinweis: Zeigen Sie die Behauptung für das Einheitssimplex $\Delta_d = \{x = (x_1, \ldots, x_d) \,|\, x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{d} x_i \leq 1\}$ (Induktion) und nutzen Sie dann die (lineare) Transformation $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $x \mapsto Ax + a_0$, mit einer geeigneten $d \times d$ Matrix A, aus.

Gesamtpunktzahl: 16