TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
Institut für Mathematik
Prof. Dr. F. Tröltzsch / V. Dhamo
Sommersemester 2008
Abgabe: 16.06.-20.06.08 im Tutorium
http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SoSe08/Analysis3

8. Übungsblatt Analysis III

Die Klausur findet am **Donnerstag**, den **17.07.** in der Zeit **14:00 - 16:00** im Hörsaal **MA 001** statt.

Übungsaufgaben

Übersicht: Kurvenintegrale I

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Berechnen Sie für die folgenden Funktionen $(-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ die zugehörigen Fourierreihen (jeweils 2π-periodisch fortgesetzt auf $\mathbb{R}$). Was lässt sich über das Konvergenzverhalten aussagen?

$$\text{a)}\ \ f(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-\pi, -\frac{\pi}{2}] \\ 1 & x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ -1 & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases} \quad , \quad \text{b)}\ \ g(x) = \tfrac{1}{2}(\sin(x) + \operatorname{sgn}(x)\sin(x))\,.$$

Berechnen Sie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$.

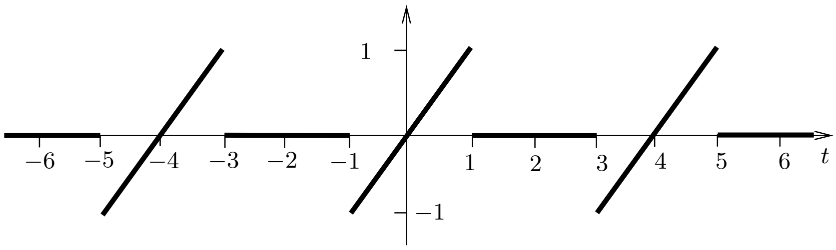
2. Aufgabe

Entwickeln Sie die folgenden (jeweils in $(0, \pi]$ bzw $[0, \pi]$ definierten) Funktionen in eine reine Sinusreihe bzw. in eine reine Kosinusreihe! Welche Funktionen stellen diese auf $[-\pi, \pi]$ dar?

$$\text{a)}\quad f(x) = 2x - 1, \qquad \text{b)}\quad g(x) = x(\pi - x)$$

3. Aufgabe

Entwickeln Sie in eine Fourierreihe:



4. Aufgabe

(i) Bestimmen Sie die n-te komplexe Partialsumme

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\omega x}, \quad c_k := \frac{1}{T}\int_0^T f(x) e^{ik\omega x}\, dx$$

der Fourierreihe der Funktion f, definiert durch $f(x) = e^{\beta x}$ für $0 \le x \le 1$ mit $f(x) = f(x+2)$ und $f(-x) = f(x)$.

(ii) Wie lautet die zugehörige Darstellung der n-ten Partialsumme im Reellen?

Hausaufgaben

1. Aufgabe (4 Punkte)

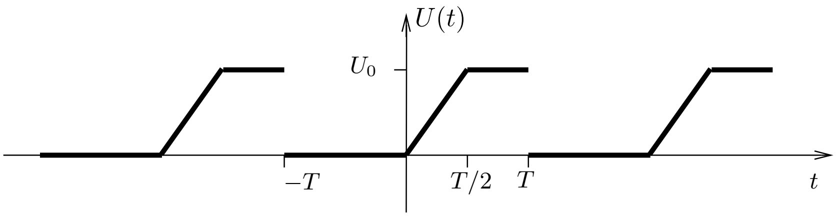
(i) Berechnen Sie für die folgenden Funktionen die zugehörigen Fourierreihen (jeweils 2π-periodisch fortgesetzt auf $\mathbb{R}$). Was lässt sich über das Konvergenzverhalten aussagen?

$$\text{a)}\ f(x) = \begin{cases} -x\,, & x \in [0,\pi] \\ 2\pi - x\,, & x \in (\pi, 2\pi]\,. \end{cases} \quad , \quad \text{b)}\ g(x) = |\sin(x)|$$

(ii) Berechnen Sie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$.

2. Aufgabe (5 Punkte)

An einem Kondensator wir das in der Abbildung dargestellte periodische Spannungs-Zeit-Diagramm aufgezeichnet. Stellen Sie den Spannungsverlauf als Fourierreihe dar.



3. Aufgabe (3 Punkte)

(i) Bestimmen Sie die Fourierreihen folgender Funktionen $[-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$:

$$\text{a)}\ f(x) = \frac{1}{4}(\cos(x)-1)(\sin(x)+\frac{3}{2})\,, \qquad \text{b)}\ f(x) = 5\cos(x) + 2\cos(5x)\,.$$

Konvergieren diese Fourierreihen punktweise? Gegen welche Funktionen?

(ii) Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \sin^2(x)$ in eine trigonometrische Reihe und bestimmen Sie

$$\int_0^{\pi} \sin^4(x)\,dx$$

mit Hilfe der Parsevalschen Gleichung.

4. Aufgabe (4 Punkte)

Seien $J \subseteq \mathbb{N}$ und $(f_j)_{j\in J}$ ein Orthonormalsystem im Hilbertraum $(H, \langle .,. \rangle)$. Zeigen Sie: $(f_j)_{j\in J}$ ist genau dann vollständig, wenn für alle $f, g \in H$ die Parsevalsche Gleichung

$$\sum_{j\in J} c_j \overline{d_j} = \langle f, g\rangle$$

gilt. Dabei sind $c_j = \langle f, f_j\rangle$ und $d_j = \langle g, f_j \rangle$ die Fourier-Koeffizienten von f bzw. g.

Hinweis: Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{j\in J} c_j\overline{d_j}$ absolut konvergent ist und drücken Sie $\langle f+g, f+g\rangle$ und $\langle f+ig, f+ig\rangle$ durch c_j und d_j aus.

Gesamtpunktzahl: 16