TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN Sommersemester 2008
Institut für Mathematik
Prof. Dr. F. Tröltzsch / V. Dhamo Abgabe: 23.06.-27.06.08 im Tutorium
http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SoSe08/Analysis3

9. Übungsblatt Analysis III

Die Klausur findet am **Donnerstag**, den **17.07.** in der Zeit **14:00 - 16:00** im Hörsaal **MA 001** statt.

Übungsaufgaben

Übersicht: Kurvenintegrale II

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und $\gamma : [a,b] \mapsto \mathbb{R}^n$ sowie $\sigma : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie folgende Eigenschaften des Kurvenintegrals:

(i) Ist $\gamma(b) = \sigma(c)$, so definieren wir

$$(\gamma \oplus \sigma) : [a, b+d-c] \to \mathbb{R}^n,\ t \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} \gamma(t) & t \in [a,b] \\ \sigma(t-b+c) & t \in (b, b+d-c]\,. \end{array} \right\}$$

Dann gilt

$$\int_{(\gamma\oplus\sigma)} F(s)\,ds = \int_\gamma F(s)\,ds + \int_\sigma F(s)\,ds\,.$$

(ii) Sei $\gamma_- : [a,b] \to \mathbb{R}^n\,, t \mapsto \gamma(b+a-t)$. Dann gilt

$$\int_{\gamma_-} F(s)\,ds = -\int_\gamma F(s)\,ds\,.$$

2. Aufgabe

(i) Man berechne die Länge der Zykloide $x = a(t - \sin(t)), y = a(1-\cos(t))$, $0 \le t \le 2\pi$.

(ii) Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,, \quad (x,y,z) \mapsto (x^2y, x-z, xyz)\,$. Berechnen Sie $\int_\gamma f(s)\,ds$ für die Kurven $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (t, t^2, 2)$ und $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (t,t,2)$. Ist f ein Gradientenfeld?

3. Aufgabe

Für welchen Wert λ kann das Vektorfeld

$$v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 + 5\lambda y + 3yz \\ 5x + 3\lambda xz - 2 \\ 2xy + \lambda xy - 4z \end{pmatrix}$$

als Gradient eines Skalarfeldes ϕ dargestellt werden? Geben Sie für dieses λ ϕ an.

4. Aufgabe
Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und V^* sein Dualraum. Seien $v_1, \ldots, v_k \in V$ und $\omega_1, \ldots, \omega_k \in V^*$. Dann gilt

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k(v_1, \ldots, v_k) = \det(\omega_i(v_j))_{i,j=1,\ldots,k} .$$

Hausaufgaben

1. Aufgabe (4 Punkte)
Man berechne:

(i) die Länge der Kardioide $r = a(1 - \cos(\varphi))$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ (vgl. Übung).

(ii) das Kurvenintegral $\int_{\Gamma(a,b)} xy \, ds$ über den Ellipsenbogen $(a, b > 0)$ $\Gamma(a,b) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$.
Hinweis: Man gebe eine geeignete Parametrisierung von $\Gamma(a,b)$ an.

2. Aufgabe (4 Punkte)

(i) In $\mathbb{R}^2$ sei γ die Kurve

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (e^t \cos(t), e^t \sin(t)) .$$

Berechnen Sie das Wegintegral $\int_\gamma x \, dy - y \, dx$.

(ii) Begründen Sie, warum für geschlossene Wege γ das Wegintegral $\int_\gamma x \, dy + y \, dx$ immer 0 ist.

3. Aufgabe (4 Punkte)
Es sei das Vektorfeld

$$v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 , \quad v(x,y,z) = (xz + ay^\lambda, xy + az^\lambda, yz + ax^\lambda) .$$

(i) Wie sind die Konstanten $a \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ zu wählen, damit v ein Gradientenfeld ist?

(ii) Berechnen Sie für die unter (i) gefundenen Konstanten eine Stammfunktion von v.

(iii) Berechnen Sie $\int_\gamma v(r) \cdot dr$, wobei $r = (x,y,z)^T$ und γ die Verbindungsstrecke zwischen den Punkten $(3,0,0)$ und $(3,3,0)$ ist.

4. Aufgabe (4 Punkte)

(i) Man berechne:

$$(x_1 \, dx_1 + x_2 \, dx_2 + x_2 \, dx_2) \wedge (x_1 \, dx_1 + x_2 \, dx_2 + x_2 \, dx_2) .$$

(ii) Für $V = \mathbb{R}^n$ definiert $\omega(v_1, \ldots, v_n) = \det(v_1, \ldots, v_n)$ eine alternierende n-Form. Zeigen Sie, dass $\det(A) = \det(A^T)$ für jede $n \times n$ Matrix A.

Gesamtpunktzahl: 16