TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN Sommersemester 2008
Institut für Mathematik
Prof. Dr. F. Tröltzsch / V. Dhamo Abgabe: 30.06.-04.07.08 im Tutorium
http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SoSe08/Analysis3

10. Übungsblatt Analysis III

Die Klausur findet am **Donnerstag**, den **17.07.** in der Zeit **14:00 - 16:00** im Hörsaal **MA 001** statt.

Übungsaufgaben

Übersicht: Oberflächenintegrale I

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Es seien $0 < r < R$. Berechnen Sie den Oberflächeninhalt des Torus'

$$T := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3^2 + ((x_1^2 + x_2^2)^{1/2} - R)^2 = r^2\} .$$

2. Aufgabe

Skizzieren Sie die folgenden Mengen und begründen Sie, welche davon 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ sind:

(i) $A = \mathbb{R} \times \{0\}$; (ii) $B = \{(x, \sin(x)) \mid x \in]0, \pi[\}$;
(iii) $C = \partial([0,1]^2)$; (iv) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^2(1 - x^2)\}$.

3. Aufgabe

Sei ω die Differentialform in $\mathbb{R}^n$:

$$\omega = \sum_{1 \le i \le n} (-1)^{i-1} x_i \, dx_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n .$$

Man beweise: $d\omega = n \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$.

4. Aufgabe

(i) Zeigen Sie: Für eine C^1-Abbildung f gilt $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$.

(ii) Man betrachte die Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$F : (r, \phi) \mapsto (x, y) = (r\cos(\phi), r\sin(\phi)) .$$

Seien $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar. Berechnen Sie die zurückgezogene Differentialform $F^*(f\,dx + g\,dy)$. Was ist $F^*(dx \wedge dy)$?

Hausaufgaben

1. Aufgabe (4 Punkte)

Berechnen Sie die Oberfläche des Kegelmantels des Kegels der Höhe h über dem Kreis mit Radius r.

2. Aufgabe (4 Punkte)

(i) Es sei

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) := \left\{ A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \det(A) = x_1x_4 - x_2x_3 = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^4 ,$$

die sog. *spezielle lineare Gruppe*. Zeigen Sie, dass $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ eine 3-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^4$ ist.

(ii) Die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$f(x,y,z) := x^2 + xy - y - z , \quad g(x,y,z) := 2x^2 + 3xy - 2y - 3z .$$

Zeigen Sie dass

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = g(x,y,z) = 0\}$$

eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

3. Aufgabe (4 Punkte)

(i) Man berechne $d(x_1x_2x_3\, dx_1 \wedge dx_2 + x_1^2x_2\, dx_1 \wedge dx_3)$.

(ii) Auf dem $\mathbb{R}^3$ betrachte man die 2-Form

$$\omega = 2xz\, dy \wedge dz + dz \wedge dx - (z^2 + e^x)\, dx \wedge dy .$$

Zeigen Sie, dass $d\omega = 0$ gilt, und bestimmen Sie eine stetig differenzierbare 1-Form η auf dem $\mathbb{R}^3$ mit $\omega = d\eta$.

4. Aufgabe (4 Punkte)

(i) Zeigen Sie: Für die Komposition $f \circ g$ von C^1-Abbildungen gilt

$$(f \circ g)^*\omega = g^*(f^*\omega) .$$

(ii) Man berechne $\phi^*\omega$ für $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\phi(x_1, x_2) = (x_1x_2, x_1^2, x_2^2)$ und $\omega = y_1^2\, dy_2 \wedge dy_3$.

Gesamtpunktzahl: 16