11. Übungsblatt Analysis III

Die Klausur findet am **Donnerstag**, den **17.07.** in der Zeit **14:00 - 16:00** im Hörsaal **MA 001** statt.

Übungsaufgaben

Übersicht: Oberflächenintegrale II

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Man betrachte die Menge $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ und die Funktion

$$f : M \to \mathbb{R}\,, \quad f(x,y,z) = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,.$$

Berechnen Sie $\int_M f\, d\sigma$, indem Sie M als Graphen einer Funktion auf der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe auffassen.

2. Aufgabe

Besitzen die folgenden 1-Formen ein Potential auf $\mathbb{R}^3$? Bestimmen Sie ggf. ein Potential.

$$\text{(i)}\ \ \omega = y\,dx + (y-x)\,dy\,, \quad \text{(ii)}\ \ \omega = y\,dx + (x-y)\,dy\,.$$

3. Aufgabe

(i) Beschreiben Sie den folgenden Körper als Spur einer 2-Kette c.

$$M := \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1^2 + x_2^2 = a^2\,,\ x_3^2 + x_4^2 = b^2\}\,.$$

(ii) Bestimmen Sie $\int_c \omega$, wobei $\omega = x_1 x_2\, dx_2 \wedge dx_3$.

(iii) Berechnen Sie $d\omega$.

(iv) Beschreiben Sie M als den Rand eines 3-dim. Körpers im $\mathbb{R}^4$, und überprüfen Sie den Satz von Stokes in diesem Fall.

4. Aufgabe

Der Körper A werde durch eine Oberfläche ∂A begrenzt, die sich aus dem Kreis $x^2 + y^2 \leq 4$ in der x-y-Ebene und dem Paraboloid $z = 4 - x^2 - y^2$ zusammensetzt, und das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$F(x,y,z) = (x+y, y+z, x+z)\,.$$

Man berechne das Integral $\int_{\partial A} F \cdot n\, d\sigma$ zuerst direkt und dann mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (4 Punkte)

Man berechne das Oberflächenintegral $\int_M (x^2 + y^2)\, d\sigma$, wobei M der Teil des Paraboloids ist, der durch

$$z(x, y) = 2 - x^2 - y^2\,, \quad x^2 + y^2 \leq 2$$

gegeben ist.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Man betrachte den durch

$$\gamma : (0,1)^2 \to \mathbb{R}^3\,, \quad \gamma(x_1, x_2) := (x_1, x_2, x_1^2 + x_2^2)$$

parametrisierten Körper X. Sei $\omega := y_3^3\, dy_1 \wedge dy_2\big|_X$ die Einschränkung auf X der 2-Form $y_3^3\, dy_1 \wedge dy_2$ auf $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie das Integral $\int_X \omega$.

3. Aufgabe (4 Punkte)

(i) Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und sternförmig und $\omega = f_1\, dx_1 + f_2\, dx_2 + f_3\, dx_3$ stetig differenzierbar auf U. Zeigen Sie: ω ist genau dann exakt, wenn für das Vektorfeld $F = (f_1, f_2, f_3) : U \to \mathbb{R}^3$ gilt $\mathrm{rot} F = 0$.

(ii) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die auf $\mathbb{R}^3$ definierte Differentialform

$$\omega := (x^2 + xy)\, dx + \left(\frac{x^2}{2} + y + z\right) dy + ay\, dz$$

exakt?

4. Aufgabe (4 Punkte)

Integrieren Sie

$$\omega = (x - y^2 + z^3)(dy \wedge dz + dx \wedge dz + dx \wedge dy)$$

über den Rand des Würfels $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leq x, y, z \leq a\}$, $a \geq 0$. (Hinweis: Stokes)

Gesamtpunktzahl: 16