TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN Sommersemester 2008
Institut für Mathematik
Prof. Dr. F. Tröltzsch / V. Dhamo Abgabe: In Absprache mit dem Tutor
http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SoSe08/Analysis3

12. Übungsblatt Analysis III

Die Klausur findet am **Donnerstag**, den **17.07.** in der Zeit **14:00 - 16:00** im Hörsaal **MA 001** statt.

Dies ist ein Zusatzblatt, alle Punkte sind Zusatzpunkte. Die Abgabe ist dementsprechend freiwillig, die Bearbeitung wird aber empfohlen.
Die Wiederholungsaufgaben sollen dazu dienen, den Stoff der Vorlesung nochmals zu üben. Sie werden nicht korrigiert und es gibt für sie auch keine Zusatzpunkte. Der Umfang und Schwierigkeitsgrad ist nicht mit den Klausuraufgaben zu vergleichen. Es können (und werden) auch andere Aufgabentypen in der Klausur vorkommen.

Wiederholungsaufgaben

1. Aufgabe
Wiederholen und verstehen Sie die wichtigen Definitionen und Sätze.

2. Aufgabe
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $a_n \geq 0$ und

$$\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,\infty]\,, \quad A \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_A(n)$$

wobei $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ die Potenzmenge von $\mathbb{N}$ ist und χ_A die charakteristische Funktion der Menge $A \subset \mathbb{N}$.

(i) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ ein Maßraum ist.

(ii) Bestimmen Sie alle μ-Nullmengen, also alle Teilmengen $B \subset \mathbb{N}$ mit $\mu(B) = 0$.

(iii) Zu einer Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ gebe es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $f(n) = 0$ für alle $n > N$ gilt. Zeigen Sie, dass f bzgl. μ integrierbar ist.

(iv) Es sei $a_n = \frac{1}{n}$. Gibt es eine μ-integrierbare Elementarfunktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, so dass $f(n) \neq 0$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt? (Geben Sie ein Beispiel an oder beweisen Sie, dass es ein solches Beispiel nicht geben kann).

3. Aufgabe
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$, wobei wir $\frac{1}{0} := +\infty$ setzen.

(i) Skizzieren Sie f.

(ii) Ist f bzgl. der Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}$ messbar?

4. Aufgabe
Existieren die Limites und, wenn ja, was ist ihr Wert?

$$\text{(i)} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \sqrt[n]{1-x^2}\, d\lambda(x)\,, \qquad \text{(ii)} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\pi]} (2\sin(x))^n\, d\lambda(x)\,.$$

5. Aufgabe
Gegeben sei die Funktionenfolge

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} n\,, & \text{falls } x \in I_n := [\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}] \\ 0\,, & \text{falls } x \in [0,1] \setminus I_n\,. \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen die Nullfunktion $f = 0$ konvergiert.

(ii) Finden Sie eine (möglichst einfache) Majorante g zu f_n, d.h. eine Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ so dass für alle $x \in [0,1]$ und alle $n \in N$: $f_n(x) \leq g(x)$ gilt.

(iii) Zeigen Sie: $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n \, d\lambda \neq \int_{[0,1]} f \, d\lambda$. Warum widerspricht dies nicht dem Satz von Lebesgue über die dominierte Konvergenz?

6. Aufgabe
Vergleichen Sie die Werte

$$\int_{[0,1]} \int_{[0,1]} f(x,y)\, d\lambda(y) d\lambda(x)\,, \quad \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} f(x,y)\, d\lambda(x) d\lambda(y)$$

für die Funktionen

$$\text{(i) } f(x,y) := (1-xy)^3\,, \quad \text{(ii) } f(x,y) := \begin{cases} \frac{1}{y^2}\,, & \text{falls } 0 < x < y < 1 \\ -\frac{1}{x^2}\,, & \text{falls } 0 < y < x < 1 \\ 0\,, & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Existiert $\int_{[0,1]^2} f(x,y)\, d\lambda^2(x,y)$? Geben Sie ggf. ihren Wert an.

7. Aufgabe
Berechnen Sie das Volumen der Menge

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x,y \in [0,1], 0 \leq z \leq e^{x+y}\}\,.$$

8. Aufgabe
Man berechne das Volumen von

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2 \leq 1, x^2+y^2 \leq z \leq 1\}$$

einmal ohne und einmal mit Hilfe des Transformationssatzes
(Hinweis: $\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{3/2}\, dx = \frac{3}{8}\pi$).

9. Aufgabe
Man betrachte den Vektorraum $\mathbb{R}^{2n}$ mit der kanonischen Orthonormalbasis $(e_1, \ldots, e_{2n})$. Die duale Basis bezeichne man mit $(dx_1, \ldots, dx_{2n})$. Man zeige, dass für die n-fache äussere Potenz der Form ω auf $\mathbb{R}^{2n}$

$$\omega := \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dx_{n+i}\,,$$

folgende Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned} \underbrace{\omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{n\text{-mal}} &= n!\,(dx_1 \wedge dx_{n+1}) \wedge \cdots \wedge (dx_n \wedge dx_{2n}) \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n!\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{2n}\,. \end{aligned}$$

10. Aufgabe
Sei $\omega = (x+z^2)\, dx \wedge dy - 2xz\, dy \wedge dz - dx \wedge dz$ eine 2-Form auf $\mathbb{R}^3$.

(i) Ist ω geschlossen?

(ii) Ist ω exakt? Falls ja, geben Sie ein Potential an!

(iii) Berechnen Sie den $f^*\omega$, wobei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (3xy^2, z - y, x)$.

11. Aufgabe
Man berechne die Bogenlänge des Spiralbogens

$$\phi : [a, b] \to \mathbb{R}^2\,, \quad \phi(x) = (e^x \cos(x), e^x \sin(x)) \qquad (a, b \in \mathbb{R}, a \leq b)\,.$$

12. Aufgabe
Man bestimme jeweils das Kurvenintegral $\int_\gamma v(s)ds$ für die durch die Parametrisierung c gegebene Kurve γ:

(i) $v(x, y) = (e^x, xy)\,, \quad c(t) = (\cos(t), \sin(t))\,,\ 0 \leq t \leq 2\pi;$

(ii) $v(x, y) = (\sin(x), x^2 + y^2)\,, \quad c(t) = \begin{cases} (t, 0) & 0 \leq t \leq 1 \\ (1, t-1)\,, & 1 < t \leq 2 \end{cases}\,.$

13. Aufgabe
Man berechne das Oberflächenintegral der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = x_3^2$ über die Einheitssphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$.

14. Aufgabe
Man überprüfe, ob die Vektorfelder $u, v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Stammfunktion besitzen und gebe ggf. eines an, wobei, für $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$u(x) = \begin{pmatrix} 2x_1x_3 \\ 1 \\ -x_3^2 - e^{x_1} \end{pmatrix}\,, \qquad v(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + e^{x_3} \\ -2x_2 \end{pmatrix}\,.$$

15. Aufgabe
Es sei ∂F der positiv orientierte Rand des Körpers $F \subset \mathbb{R}^3$, der gegeben ist durch

$$x^2 + y^2 \leq 3\,, \ \ z = y^2 - x^2\,.$$

Man berechne das Kurvenintegral 2. Art $\int_{\partial F} f \cdot dx$ für das Vektorfeld

$$f(x, y, z) := (z - 5y, 9x - 3z, y - 2x)\,.$$

16. Aufgabe
Die Oberfläche von $Z := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ sei mit F bezeichnet, und es sei

$$v(x, y, z) := (x^3, x^2y, x^2z)\,.$$

Man berechne $\int_F v \cdot n\, d\sigma$, wobei n der Einheitsnormalenvektor ist, der ins Äußere des Zylinders Z weist.

Zusatzaufgaben

1. Zusatzaufgabe (2 Punkte)

Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (-y, x, 1)$. Man berechne mit Hilfe des Satzes von Stokes

$$\int_G \text{rot } F \cdot n \, d\sigma \,,$$

wobei $G := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq 4,\ z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}\}$.

2. Zusatzaufgabe (2 Punkte)

Sei $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld und $F := \text{rot } v$. Zeigen Sie, dass für jedes $A \subset \mathbb{R}^3$ mit "hinreichend glattem" Rand (vgl. Vermutung 4.21 im Skript) gilt:

$$\int_{\partial A} F \cdot n \, d\sigma = 0 \,.$$

3. Zusatzaufgabe (4 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Integralsatz für den Kreiszylinder $x^2 + y^2 \leq R^2$, $0 \leq z \leq H$ und das Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \,, \quad (x, y, z) \mapsto (xy, yz, 3) \,.$$

4. Zusatzaufgabe (2 Punkte)

Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Man beweise ohne Benutzung der Formel der partiellen Integration:

$$\int_a^b \big\{ f(x) g''(x) - f''(x) g(x) \big\} \, dx = f(b) g'(b) - f'(b) g(b) - f(a) g'(a) + f'(a) g(a) \,,$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. (Hinweis: Greensche Formeln)

Gesamtpunktzahl: 10