

Einige Anmerkungen zu Formulierungen und Beweisen

Allgemeines

- Beginnt ein Beweis mit „ $f(x) = z$ “, so ist das FALSCH! Es ist nämlich nicht klar, was x und z sein sollen, da ihr es vorher nicht hingeschrieben habt. $x, Y, A, \beta, x_n, \dots$ haben immer erst dann eine Bedeutung, wenn ihr erklärt habt, was diese Symbole im konkreten Fall heißen sollen!

Richtig ist z.B. „Sei $x \in X$. Dann existiert ein $z \in Z$ mit $f(x) = z$ “ – vorausgesetzt natürlich, ihr habt die Mengen X und Z sowie f vorher definiert bzw. sie sind aus der Aufgabenstellung bekannt.

- „Es folgt $f(x) = z$ “, wenn vorher nie von einem z die Rede war, ist ebenfalls FALSCH! Falls ihr meint „Setze $z := f(x)$ “, dann ist es keine Folgerung!
- „ $\forall x \in X : f(x) \in Y$. Sei $y := f(x)$ “ ist auch FALSCH! Für welches x soll denn $y = f(x)$ sein?

Richtig ist z.B. „ $\forall x \in X : f(x) \in Y$. Sei $x \in X$ beliebig. Wir setzen $y := f(x)$.“

- „Sei $\pi = 1$ “ oder „Sei $z \in \mathbb{C}$ reell mit $\text{Im } z \neq 0$ “ ist FALSCH! Mit „Sei...“ w \ddot{u} l $\frac{1}{2}$ hlt ihr Objekte fest aus. Das dürft ihr nur tun, wenn gewährleistet ist, dass Objekte mit den von euch geforderten Eigenschaften tatsächlich existieren! Es existiert beispielsweise keine reelle Zahl mit Imaginärteil ungleich null (wenn man sie als Element von \mathbb{C} auffasst)...

Richtig ist z.B. „Sei $x \in X$ “ (wenn ihr wisst, dass X eine nichtleere Menge ist) oder „Sei $z \in \mathbb{C}, \text{Im } z \neq 0$ “.

- „Sei $n \in \mathbb{N}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt...“ ist FALSCH! Sobald ihr schreibt „Sei $n \in \mathbb{N}$ “, ist dieses n ein fest gewähltes Objekt, in diesem Fall eine feste natürliche Zahl.

Richtig ist z.B. „Sei $n \in \mathbb{N}$. Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt $m > 0$. Also gilt auch $n > 0$.“

- „ f ist genau dann surjektiv, wenn gilt $f(x) = y$ “ ist FALSCH! Wenn ihr vorher x und y fest gewählt habt, ist die Aussage „ $f(x) = y$ “ zwar sinnvoll, aber hat nichts mit dem zu tun, was ihr sagen wolltet. Anderenfalls ist aber genau so unklar, was ihr meint: „ $\forall x \in X, y \in Y : f(x) = y$ “? Oder vielleicht „ $\exists y \in Y \forall x \in X : f(x) = y$ “?

Richtig ist z.B. „ $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$.“

- Ein Beweis ist ein Text. Der Korrektor liest ihn linear von oben nach unten. Demnach müssen eure Gedankengänge auch in genau dieser Reihenfolge aufgeschrieben sein! Ein Beweis besteht aus der Verkettung von logischen Implikationen (Folgerungen). Stimmt jede einzelne Folgerung, so stimmt auch der gesamte Beweis. Ist euch eine einzige Folgerung in der Argumentationskette nicht klar oder ist sie sogar falsch, so ist die gesamte Argumentationskette wertlos und ihr habt nichts bewiesen!
- Zusammenhangslos untereinanderstehende Formelzeilen haben keinen Sinn. Wie soll der Leser wissen, ob z.B. die eine Zeile aus der anderen folgen soll oder ihr beide voraussetzt oder beide aus etwas anderem folgert oder noch anderes damit vorhabt.

Aussagen, logische Verknüpfungen und Quantoren

- $\{\forall n \in \mathbb{N} : n \text{ ist eine Primzahl}\}$ ist FALSCH! Quantoren haben in einer Mengenklammer vor dem ersten Doppelpunkt bzw. dem senkrechten Strich nichts verloren!

Richtig ist z.B. $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist eine Primzahl}\}$.

- „ $\forall x \in X : f(x)$ “ oder „ $\exists r \in \mathbb{R} : \frac{r}{17}$ “ ist FALSCH! Auf „ $\forall \dots$ “ oder „ $\exists \dots$ “ muss stets eine Aussage folgen. „ $f(x)$ “ oder „ $\frac{r}{17}$ “ sind keine Aussagen.

Richtig ist z.B. $\forall x \in X : f(x) \in Y$ oder $\exists r \in \mathbb{R} : \frac{r}{17} > 1$.

- „ $f \wedge g$ sind surjektiv“ ist FALSCH! Das Symbol \wedge verknüpft Aussagen. Aber „ f “ ist keine Aussage.

Richtig ist z.B. $(f \text{ ist surjektiv}) \wedge (g \text{ ist surjektiv})$ (oder einfach: „ f und g sind surjektiv“ als Text).

- „Sei $x \in X \cap Y \iff x \in X \wedge x \in Y$ “ ist FALSCH! Meint ihr „Es gilt $x \in X \cap Y \iff x \in X \wedge x \in Y$.“? Das ist in der Tat immer wahr. Oder wählt ihr ein $x \in X \cap Y$? Dann schreibt „Sei $x \in X \cap Y$, also $x \in X$ und $x \in Y$.“

- „Wenn $g \circ f$ injektiv ist, dann ist f injektiv“ bedeutet *nicht*: „Wenn f injektiv ist, dann ist $g \circ f$ injektiv. Diese Folgerung ist FALSCH! Habt ihr zwei Aussagen A und B und ihr wisst nur $A \Rightarrow B$, dann könnt ihr auch NUR das verwenden, nicht die umgekehrte Implikation!

- $f(x) \Leftrightarrow y$ ist FALSCH! \Leftrightarrow ist eine Verknüpfung von Aussagen. „ $f(x)$ “ und „ y “ sind keine Aussagen.

Richtig ist z.B. „ $f(x) = y$ “ oder „ $f(x) \in Y \Leftrightarrow x \in A$ “ (immer vorausgesetzt, dass alle beteiligten Objekte vorher sinnvoll definiert wurden).

- „ $\exists p \in \text{Primzahlen} : \dots$ “ ist FALSCH! Was soll „Primzahlen“ sein?

Richtig ist z.B. „Sei P die Menge aller Primzahlen. Dann gilt: $\exists p \in P : \dots$ “

Funktionen

- „ $f(x)$ ist surjektiv“ ist FALSCH! $f(x)$ ist keine Funktion sondern ein Element in der Wertemenge der Funktion f , vorausgesetzt, ihr habt vorher sinnvoll erklärt, was x ist. Die Funktion, die (vermutlich?) gemeint ist, heißt f .

Richtig ist z.B. f ist surjektiv.

- „Sei $f(x) \in Y$. Dann gilt $x = \dots$ “ ist FALSCH! Wenn ihr einen festen Wert y aus der Wertemenge der Funktion f wählt, ist nicht klar, dass nur *ein* x in der Definitionsmenge von f existiert, so dass $f(x) = y$ gilt. Durch die obige Forderung ist also x keineswegs eindeutig bestimmt und es ist in der Regel sinnlos, dann Aussagen über x treffen zu wollen.

Richtig ist z.B. „Sei $x \in X$. Dann ist $f(x) \in Y$ und es gilt...“ – immer vorausgesetzt, alle beteiligten Objekte wurden VORHER sinnvoll von euch definiert.

- „ $f : X \rightarrow Y$. Sei $x \in X$. Dann existiert ein $y \in Y$ mit $y = f(x)$.“ ist sicherlich nicht direkt FALSCH! Was ihr aber meint, ist wohl eher (und sicherlich leichter verständlich):

Richtig ist z.B. „ $f : X \rightarrow Y$. Sei $x \in X$. Dann ist $y := f(x) \in Y$.“

Zur äußeren Form

- Schreibt leserlich! Euer Korrektor wird sich nicht die Mühe geben, eure Schrift mit der Lupe zu entziffern. Unleserliche Aufgaben gelten als nicht bearbeitet!
- Lasst Abstand zwischen den Zeilen und genügend große Ränder für Anmerkungen des Korrektors.

Und noch ein Hinweis: Ihr arbeitet in Gruppen zu dritt. Euer Ziel sollte sein, dass jede(r) aus der Gruppe sich mit JEDER Aufgabe zumindest beschäftigt hat und dass JEDE(R) Gruppenteilnehmer(in) eure KOMPLETTE Lösung vor der Abgabe noch einmal durchgelesen hat. Dies dient der gegenseitigen Kontrolle! Ist die Argumentation schlüssig dargelegt? **Ist eure Lösung für eure Gruppenpartner(innen) unverständlich oder nur durch Raten oder eure Erklärungen sinnvoll interpretierbar, so besteht keine Chance, dass ihr auf diese Aufgabe Punkte bekommt!**