Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. J. Behrndt, C. Kreusler

Sommersemester 2009

Analysis I

1.Übungsblatt

Abgabe vor den Tutorien am 30.April / (1. Mai).

Aufgabe 1: **5 Punkte**

(i) Wir schreiben $A(x)$, falls die Aussage A auf x zutrifft. Die Aussage $\exists! x : A(x)$ (lies: „Es gibt genau ein x, so daß die Aussage A auf x zutrifft.“), definieren wir durch

$$(\exists x : A(x)) \wedge \Big(\forall x \forall y : (A(x) \wedge A(y)) \Rightarrow (x = y)\Big).$$

Verneinen Sie diese Aussage.

(ii) Formulieren Sie folgende Sätze, indem Sie geeignete Aussagen definieren und diese mit Hilfe der zur Verfügung stehenden logischen Verknüpfungen verbinden. Formulieren Sie darüberhinaus auch die Negation beider Aussagen.

(a) Jede gerade natürliche Zahl größer als 2 läßt sich als Summe von zwei Primzahlen schreiben.

(b) Zwischen jeder natürlichen Zahl und ihrem Doppelten gibt es eine Primzahl.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Die *symmetrische Differenz* $A\Delta B$ der Mengen A und B ist definiert durch

$$A\Delta B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A).$$

Es seien nun X, Y und Z Mengen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(i) $X\Delta(Y \cup Z) = (X\Delta Y) \cup (X\Delta Z)$.

(ii) $X\Delta(Y \cap Z) = (X\Delta Y) \cap (X\Delta Z)$.

(iii) $X \cup (Y \backslash Z) = \Big((X \cup Y)\backslash Z\Big) \cup (X \cap Z)$.

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Es seien X, Y, Z Mengen und $f : X \to Y$ sowie $g : Y \to Z$ Funktionen.

(i) Zeigen Sie: Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist auch g surjektiv.

(ii) Zeigen Sie: Ist $g \circ f$ injektiv und f surjektiv, so ist g injektiv. Gilt diese Aussage auch, wenn f nicht surjektiv ist?

(iii) Es sei nun $Z = X$, also $g : Y \to X$. Weiterhin gelte[1] $g \circ f = id_X$ und $f \circ g = id_Y$. Zeigen Sie, daß sowohl f als auch g bijektiv sind.
Welcher Zusammenhang besteht zwischen f und g?

[1] $id_X : X \to X,\ x \mapsto id_X(x) = x$ und $id_Y : Y \to Y,\ y \mapsto id_Y(y) = y$.

Aufgabe 4: **6 Punkte**

Es seien X und Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Funktion. Zeigen Sie, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) f ist injektiv.

(ii) Für alle Teilmengen $A \subset X$ gilt $f^{-1}(f(A)) = A$.

(iii) Für alle Teilmengen $A, B \subset X$ gilt $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

(iv) $f(A) \cap f(B) = \emptyset$ gilt für alle Teilmengen $A, B \subset X$ mit $A \cap B = \emptyset$.

(v) Sind A und B Teilmengen von X mit $B \subset A$, so gilt $f(A \backslash B) = f(A) \backslash f(B)$.

Das griechische Alphabet

Alpha	α	A	Ny	ν	N
Beta	β	B	Xi	ξ	Ξ
Gamma	γ	Γ	Omikron	o	O
Delta	δ	Δ	Pi	π	Π
Epsilon	ϵ (ε)	E	Rho	ρ (ϱ)	P
Zeta	ζ	Z	Sigma	σ	Σ
Eta	η	H	Tau	τ	T
Theta	θ (ϑ)	Θ	Ypsilon	υ	Y
Iota	ι	I	Phi	ϕ (φ)	Φ
Kappa	κ ($\varkappa$)	K	Chi	χ	X
Lambda	λ	Λ	Psi	ψ	Ψ
My	μ	M	Omega	ω	Ω