Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. J. Behrndt, C. Kreusler

Sommersemester 2009

Analysis I

10.Übungsblatt

Abgabe vor den Tutorien am 2. Juli / 3. Juli.

Klausur: Die Klausur findet am **15. Juli** zur Zeit der Übung (**12-14 Uhr**) statt und zwar in den Räumen
MA 004: Anfangsbuchstabe des Nachnamens: **A-J**,
EB 301[1]: Anfangsbuchstabe des Nachnamens: **K-Z**.

Bitte bringen Sie einen Lichtbildausweis, den Studentenausweis, leere A4-Blätter und etwas zum Schreiben mit. Es sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen (insbesondere keine Handys, keine Taschenrechner und keine „Spickzettel“).

Die Klausurergebnisse werden auf Wunsch voraussichtlich am 15. Juli, abends, auf der Website einsehbar sein. Ihre Klausur und gegebenenfalls Ihren Übungsschein können Sie am Donnerstag, den 16. Juli, von 11-13 Uhr im MA 366 einsehen und abholen.

Es wird eine Nachklausur am 8. Oktober von 10-12 Uhr geben. Zur Nachklausur ist zugelassen, wer in der Klausur mehr als die Hälfte der zum Bestehen nötigen Punkte erreicht.

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Es sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig. Wir definieren den *Stetigkeitsmodul* ω_f von f auf D durch

$$\omega_f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad \omega_f(\delta) := \sup\{|f(x) - f(y)| \,:\, x, y \in D, |x - y| < \delta\}.$$

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

(i) ω_f ist monoton wachsend.

(ii) ω_f ist subadditiv, d.h. für alle $\delta, \delta' \in (0, \infty)$ gilt $\omega_f(\delta + \delta') \leq \omega_f(\delta) + \omega_f(\delta')$.

(iii) f ist auf D genau dann gleichmäßig stetig, falls $\lim_{\delta \to 0, \delta > 0} \omega_f(\delta) = 0$.

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Gegeben seien die Funktionenfolgen

$$f_n : [0, 2] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_n(x) := \frac{x^n - 1}{x^n + 1}$$

und

$$g_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g_n(x) := (1 - x^2)^n.$$

(i) Skizzieren Sie die Graphen von (f_n) und (g_n).

(ii) Bestimmen Sie die punktweisen Limites von (f_n) und (g_n).

[1] Der EB 301 befindet sich im 3. Stock des Erweiterungsbaus. Dies ist das „alte“ Gebäude rechts (vom MA aus gesehen) neben dem Hauptgebäude.

(iii) Konvergieren (f_n) beziehungsweise (g_n) gleichmäßig?

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Es sei (X, d) ein metrischer Raum $D \subset X$ und $f_n : D \to \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, so daß (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert. Es sei weiterhin x_0 ein Häufungspunkt von D und es gelte für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{x \to x_0} f_n(x) =: y_n.$$

Zeigen Sie, daß dann $(y_n)_n$ konvergiert und

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x)$$

gilt, daß man also beide **Grenzwerte vertauschen** darf. Zeigen Sie weiterhin, daß auf *gleichmäßige* Konvergenz nicht verzichtet werden kann.

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Es seien $f_n, f \in B([a, b])$, $n \in \mathbb{N}$. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(i) Es gelte $f_n \to f$ gleichmäßig. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_\infty = \|f\|_\infty$.

(ii) Falls $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_\infty = \|f\|_\infty$, dann konvergiert $f_n \to f$ punktweise.

(iii) Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $f_n \to f$ gleichmäßig. Dann konvergiert $g \circ f_n$ gleichmäßig.

(iv) Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig und $f_n \to f$ gleichmäßig. Dann konvergiert $g \circ f_n$ gleichmäßig.

(v) Die Folge (s_n) der Partialsummen der geometrischen Reihe, also $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$, $x \in (-1, 1)$, konvergiert auf $(-1, 1)$ gleichmäßig.