Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. J. Behrndt, C. Kreusler

Sommersemester 2009

Analysis I

11. (und letztes) Übungsblatt

Abgabe vor den Tutorien am 9. Juli / 10. Juli.

Die Abgaben zu diesem Aufgabenblatt werden rechtzeitig vor der Klausur fertig korrigiert sein. Um zu erfahren, wie viele Punkte Sie erreicht haben (und ob ggf. damit die Klausurzulassung geschafft wurde), vermerken Sie bitte (lesbar!) Ihre Mailadresse auf der Abgabe.

Klausur: Die Klausur findet am **15. Juli** zur Zeit der Übung (**12-14 Uhr**) statt und zwar in den Räumen
MA 004: Anfangsbuchstabe des Nachnamens: **A-J**,
EB 301[1]: Anfangsbuchstabe des Nachnamens: **K-Z**.

Bitte bringen Sie einen Lichtbildausweis, den Studentenausweis, leere A4-Blätter und etwas zum Schreiben mit. Es sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen (insbesondere keine Handys, keine Taschenrechner und keine „Spickzettel").

Die Klausurergebnisse werden auf Wunsch voraussichtlich am 15. Juli, abends, auf der Website einsehbar sein. Ihre Klausur und gegebenenfalls Ihren Übungsschein können Sie am Donnerstag, den 16. Juli, von 11-13 Uhr im MA 366 einsehen und abholen.

Es wird eine Nachklausur am 8. Oktober von 10-12 Uhr geben. Zur Nachklausur ist zugelassen, wer in der Klausur mehr als die Hälfte der zum Bestehen nötigen Punkte erreicht.

Aufgabe 1: **6 Punkte**

Bestimmen Sie für folgende Funktionen f die Ableitung f', jeweils auf dem maximalen Definitionsbereich. Hierbei sei $a > 0$ und $g : (0, \infty) \to (0, \infty)$ differenzierbar.

$$
\begin{array}{lll}
f(x) = e^{7x^3+5x+1} & f(x) = \sqrt{1+5x^2} & f(x) = \sin(\sqrt{x})\cos(\sqrt{x}) \\
f(x) = \frac{\sqrt{x}\sin(x)}{\ln x} & f(x) = \sqrt{1+\sinh^2(x)} & f(x) = \sin(a^x) \\
f(x) = a^{\sin(x)} & f(x) = x^{(x^x)} & f(x) = x^{g(g(x))}
\end{array}
$$

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Weiterhin sei $f(a) \le g(a)$ und $f'(x) < g'(x)$ für alle $x \in (a, b)$. Zeigen Sie, daß $f(x) < g(x)$ für alle $x \in (a, b]$ gilt. Folgern Sie, daß $\tan(x) > x$ für alle $x \in (0, \pi/2)$.
Hinweis: Mittelwertsatz.

Aufgabe 3: **5 Punkte**

(i) Eine Funktion $f : (-a, a) \to \mathbb{R}$ heißt gerade (ungerade), falls $f(-x) = f(x)$ (bzw. $f(-x) = -f(x)$) für alle $x \in (-a, a)$ gilt.

[1] Der EB 301 befindet sich im 3. Stock des Erweiterungsbaus. Dies ist das „alte" Gebäude rechts (vom MA aus gesehen) neben dem Hauptgebäude.

Zeigen Sie, daß die Ableitung einer geraden (ungeraden) Funktion eine ungerade (gerade) Funktion ist.

(ii) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, daß f auf jedem beschränkten Intervall Lipschitz-stetig ist.

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $F : I \times I \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion mit den beiden folgenden Eigenschaften:

(i) Für alle $a, b, c \in I$ gilt: $F(a, b) = F(a, c) + F(c, b)$.

(ii) Es seien $m, M \in \mathbb{R}$ und $x, y \in I$, so daß $[x, y] \subset I$ und $m \leq f(\xi) \leq M$ für alle $\xi \in [x, y]$. Dann gilt
$$m(y - x) \leq F(x, y) \leq M(y - x).$$

Zeigen Sie, daß für beliebiges $x_0 \in I$ die Funktion $I \ni x \mapsto F(x_0, x)$ auf I differenzierbar ist mit Ableitung f.

Zusatzaufgabe 1: **5 Zusatzpunkte**

(i) Es seien $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wobei h beschränkt und g in 0 stetig sei. Berechne die Ableitungen folgender Funktionen an der Stelle $x = 0$.
$$f(x) = xg(x), \qquad f(x) = x^2 h(x)$$

(ii) Es sei $D \subset \mathbb{R}$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen.

(a) Ist f in x_0 differenzierbar, so gilt
$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}.$$

(b) Falls
$$a := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$
existiert, so ist f in x_0 differenzierbar und es ist $f'(x_0) = a$.

Zusatzaufgabe 2: **4 Zusatzpunkte**

Es sei $f : [0, 1] \to [0, 1]$ stetig und auf $(0, 1)$ differenzierbar, so daß $f'(x) \neq 1$ für alle $x \in (0, 1)$ gilt. Zeigen Sie, daß dann f genau einen Fixpunkt in $[0, 1]$ besitzt, daß es also genau ein $x_0 \in [0, 1]$ gibt mit $f(x_0) = x_0$.