Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. J. Behrndt, C. Kreusler

Sommersemester 2009

Analysis I

2.Übungsblatt

Abgabe vor den Tutorien am 7. Mai / 8. Mai.

Aufgabe 1: **6 Punkte**

Beweisen Sie folgende Aussagen.

(i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.
(Es gibt zwei Zusatzpunkte, wenn Sie zusätzlich einen alternativen Beweis finden.)

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, gilt $\binom{n}{2} \geq n^2/4$.

(iii) (*Bernoullische Ungleichung*) Für jedes $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, und jede reelle Zahl $x > -1$, $x \neq 0$, ist

$$(1+x)^n > 1 + nx.$$

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Berechnen Sie die folgenden Mengen.[1]

(i) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{n}, 1\right]$

(ii) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Es seien $x, y \in \mathbb{R}$. Folgern Sie folgende Aussagen aus den Axiomen der reellen Zahlen.

(i) Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ gilt $1/x > 0$.

(ii) Ist $0 < x < y$, so folgt $1/x > 1/y$.

Aufgabe 4: **6 Punkte**

(i) Bestimmen Sie, sofern diese existieren, das Infimum und das Supremum der Menge

$$M := \left\{(-1)^n(1 + 1/n) \,|\, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

(ii) Die Mengen $A \subset \mathbb{R}$ und $B \subset \mathbb{R}$ seien nach unten und nach oben beschränkt. Zeigen Sie, daß die Menge

$$C := \{x \,|\, x = y + z,\ y \in A,\ z \in B\}$$

nach oben und nach unten beschränkt ist mit

$$\sup(C) = \sup(A) + \sup(B), \quad \text{und} \quad \inf(C) = \inf(A) + \inf(B).$$

(iii) Es sei A eine nichtleere, nach oben beschränkte Teil menge von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß die Menge

$$-A := \{-x \in \mathbb{R} \,|\, x \in A\}$$

nach unten beschränkt ist und daß $\inf(-A) = -\sup(A)$ gilt.

[1] Hinweis: Das archimedische Prinzip könnte helfen.