Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. J. Behrndt, C. Kreusler

Sommersemester 2009

Analysis I

3.Übungsblatt

Abgabe vor den Tutorien am 14. Mai / 15. Mai.

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Schreiben sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie weiterhin jeweils den Real- und Imaginärteil, den Betrag und die zugehörige komplex konjugierte Zahl.

(i) $z_1 = \frac{1+i}{3+i}$,

(ii) $z_2 = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{21}$,

(iii) $z_3 = \sum_{n=1}^{31415926536} i^n$

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Bestimmen Sie alle (komplexen) Lösungen von $z^3 = 1$ und skizzieren Sie diese in der komplexen Zahlenebene.

Aufgabe 3: **6 Punkte**

(i) Zeigen Sie, daß metrische Räume stets die *Hausdorff-Eigenschaft* haben, daß also folgendes gilt:

> Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gibt es für je zwei verschiedene Punkte $x_1, x_2 \in X$ offene Mengen $U_1, U_2 \subset X$ mit $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

(ii) Es sei X eine nichtleere Menge und $d : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Zeigen Sie, daß d genau dann eine Metrik auf X ist, falls für alle $x, y, z \in X$ gilt:

(a) $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$,

(b) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(z, y)$.

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Es sei

$$X = \{f : (0, 1) \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist beschränkt}\}$$

die aus der Vorlesung bekannte Menge beschränkter Funktionen, welche mit der Metrik

$$d(f, g) := \sup_{x \in (0,1)} |f(x) - g(x)|, \quad f, g \in X$$

einen metrischen Raum bildet.
Zeigen Sie:

(i) Die Menge

$$A := \{f \in X \,|\, \text{Es gibt } \epsilon > 0 \text{ mit } f(x) > \epsilon \text{ für alle } x \in (0,1)\}$$

ist eine offene Teilmenge von X[1]

(ii) Die Menge

$$B := \{f \in X \,|\, f(1/2) = 0\}$$

ist eine abgeschlossene Teilmenge von X.

[1] Zwei Zusatzpunkte gibt es, wenn Sie zeigen, daß die Menge $A' := \{f \in X \,|\, f(x) > 0 \text{ für alle } x \in (0,1)\}$ nicht offen in X ist.