Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. J. Behrndt, C. Kreusler

Sommersemester 2009

Analysis I

4.Übungsblatt

Abgabe vor den Tutorien am (21. Mai) / 22. Mai.
Achtung: Am 21. Mai (Himmelfahrt) finden keine Tutorien statt.

Aufgabe 1: **5 Punkte**

(*Sandwich-Prinzip*) Es seien $(x_n), (y_n)$ und (z_n) Folgen reeller Zahlen mit $x_n \leq y_n \leq z_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Außerdem seien (x_n) und (z_n) konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n =: x_0.$$

Zeigen Sie, daß dann auch die Folge (y_n) konvergent ist mit $\lim_{n\to\infty} y_n = x_0$.
Gilt diese Behauptung auch dann noch, wenn nur $x_n \leq y_n \leq z_n$ für alle $n > N$ für ein festes $N \in \mathbb{N}$ vorausgesetzt wird?
Zeigen Sie weiterhin, daß die reelle Zahlenfolge $y_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$ (bezüglich der normalen Metrik) konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Untersuchen Sie die folgenden reellen Zahlenfolgen auf Konvergenz (bezüglich der normalen Metrik) und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(i) $x_n := \frac{(n+12)(n+27)(n+3)}{n+n^2+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $x_n := \sqrt[n]{c}$, $n \in \mathbb{N}$, $c > 0$.

(iii) Die Folge (x_n) sei rekursiv wie folgt definiert:

$$x_1 := 1, \quad x_{n+1} := \sqrt{x_n + 1},\ n \in \mathbb{N}.$$

Hinweis: Zeigen Sie (z.B. per Induktion), daß die Folge monoton und beschränkt ist.

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Es sei (X, d) ein metrischer Raum und sei (x_n) eine Folge in X. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.

(i) Existiert eine konvergente Teilfolge von (x_n), so konvergiert auch die Folge (x_n) selbst.

(ii) Konvergiert jede Teilfolge von (x_n), so konvergiert auch die Folge (x_n) selbst.

(iii) Besitzt jede Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n) eine gegen $x \in X$ konvergente Teilfolge $(x_{n_{k_l}})$, so konvergiert auch (x_n) gegen x.

(iv) Sei (y_n) eine weitere Folge, so daß $x_n = y_n$ für alle bis auf endlich viele Indizes $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann konvergiert (y_n) genau dann, wenn (x_n) konvergiert und die Grenzwerte stimmen überein.

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Es sei $X = \mathbb{R}^3$ versehen mit der Metrik

$$d : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_0^+, \quad d(x,y) := \sum_{i=1}^{3} |x_i - y_i|$$

für $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, daß der metrische Raum (X, d) vollständig ist.