Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. J. Behrndt, C. Kreusler

Sommersemester 2009

Analysis I

5.Übungsblatt

Abgabe vor den Tutorien am 28. Mai / 29. Mai.

Am nächsten Mittwoch (27. Mai) gibt es ab 18 Uhr auf der Wiese hinter dem Mathegebäude (bei schlechtem Wetter irgendwo im MA) ein Analysis-I-Trinken/Quatschen/Rumstehen...

Aufgabe 1: **6 Punkte**

(i) Bestimmen Sie für die folgenden Mengen A jeweils den offenen Kern A°, den Abschluss $\overline{A}$ und den Rand ∂A und entscheiden Sie, ob A offen oder abgeschlossen ist.

(a) $A := \{x \in \mathbb{R} \,|\, -1 \leq x \leq 1 \text{ oder } x = 2\} \subset \mathbb{R}$,

(b) $A := B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^3 \,||x| < 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

(ii) Es sei nun (X,d) ein metrischer Raum und $A, B \subset X$ Teilmengen von X. Zeigen Sie, daß stets $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ gilt, aber im allgemeinen keine Gleichheit.

Aufgabe 2: **6 Punkte**

(i) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte sowie $\liminf$ und $\limsup$ der reellen Zahlenfolge (x_n), welche durch

$$x_n := \begin{cases} 1 + 1/2n & \text{falls } n = 3k-2 \\ 2 + (n+1)/3n & \text{falls } n = 3k-1 \\ 2 & \text{falls } n = 3k \end{cases}$$

für $k \in \mathbb{N}$, gegeben ist.

(ii) Es seien nun (x_n) und (y_n) beschränkte Folgen reeller Zahlen. Zeigen Sie die beiden folgenden Behauptungen.

(a) Es gilt stets

$$\limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n,$$

aber im allgemeinen keine Gleichheit.

(b) Die Folge (x_n) konvergiert genau dann, falls

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \leq \liminf_{n\to\infty} x_n$$

gilt. In diesem Fall ist

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n.$$

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Es sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \begin{cases} x, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Untersuchen Sie, in welchen Punkten f stetig bzw. unstetig ist.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Es seien (X, d) und (X', d') metrische Räume und $f : X \to X'$ eine Funktion, $x_0 \in X$. Untersuchen Sie, aus welchen der folgenden Bedingungen die Stetigkeit von f im Punkt x_0 folgt.

(i) $\forall \epsilon > 0 \, \forall \delta > 0 \, \exists x \in X : d(x, x_0) < \delta$ und $d'(f(x), f(x_0)) < \epsilon$.

(ii) $\forall \alpha \in (0, 1) \, \exists \beta > 0 :\ d'(f(x), f(x_0)) \leq \alpha$ für alle $x \in X$ mit $d(x, x_0) \leq \beta$.

(iii) $\forall \delta > 0 \, \forall \epsilon > 0 :\ d'(f(x), f(x_0)) < \epsilon$ für alle $x \in X$ mit $d(x, x_0) < \delta$.

Welche Eigenschaft haben Funktionen, die die dritte Bedingung erfüllen?