Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. J. Behrndt, C. Kreusler

Sommersemester 2009

Analysis I

6.Übungsblatt

Abgabe vor den Tutorien am 4. Juni / 5. Juni.

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Gegeben seien die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$(x,y) \mapsto f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

und

$$(x,y) \mapsto g(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie folgende Behauptungen.

(i) Die Funktion f ist stetig.

(ii) Die Funktion g ist nicht stetig. Es ist jedoch jede Einschränkung von g auf eine Gerade durch $(0,0)$ stetig[1]

(iii) Entscheiden Sie (wie immer mit Beweis), ob die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$(x,y) \mapsto h(x,y) := \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$$

stetig ist oder nicht.

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Es seien (X,d) und (Y,d') metrische Räume, $x_0 \in X$. Eine stetige Funktion $f : X\backslash\{x_0\} \to Y$ heißt *stetig in x_0 fortsetzbar*, falls es ein $y_0 \in Y$ gibt, so daß die Funktion

$$\tilde{f} : X \to Y, \quad x \mapsto \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in X\backslash\{x_0\} \\ y_0 & \text{falls } x = x_0, \end{cases}$$

auf X stetig ist. Zeigen Sie:

(i) Es sei $A \subset \mathbb{R}$ offen, $x_0 \in A$. Eine stetige Funktion $f : A\backslash\{x_0\} \to \mathbb{R}$ ist genau dann in x_0 stetig fortsetzbar, wenn sowohl der rechts- und linksseitige Grenzwert von f in x_0 existiert und beide übereinstimmen.

(ii) Die Funktion $f : \mathbb{R}\backslash\{-2\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x^3-4x}{x+2}$ ist stetig auf die ganze reelle Gerade fortsetzbar.

(iii) Die Funktion $f : (0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ ist nicht stetig in 0 fortsetzbar.

[1] Jede solche Gerade mit Ausnahme der y-Achse läßt sich in der Form $\{(x,ax) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$ für ein $a \in \mathbb{R}$ darstellen.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Entscheiden Sie (wie immer mit Beweis), ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(i) Sei $A \subset X$ eine endliche Menge (d.h. A enthält nur endlich viele Elemente). Dann ist A kompakt.

(ii) Jede Überdeckung einer kompakten Teilmenge $K \subset X$ mit abgeschlossenen Mengen enthält eine endliche Teilüberdeckung.

Aufgabe 4: **6 Punkte**

Es seien (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$ sowie $A_i \subset X$, $i = 1, \ldots, N$, kompakte Teilmengen. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(i) Ist $B \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge von A, so ist auch B kompakt in X. Gilt diese Behauptung auch noch, wenn die Abgeschlossenheit von B nicht gefordert wird?

(ii) Die Mengen

$$\bigcap_{i=1}^{N} A_i \quad \text{und} \quad \bigcup_{i=1}^{N} A_i$$

sind kompakt.