Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. J. Behrndt, C. Kreusler

Sommersemester 2009

Analysis I

7.Übungsblatt

Abgabe vor den Tutorien am 11. Juni / 12. Juni.
Dies ist das erste Blatt der zweiten Semesterhälfte, welche aus den fünf (!) Übungsblättern 7 – 11 bestehen wird.

Aufgabe 1: **6 Punkte**

(i) Es seien (X, d) und (X', d') metrische Räume und $f : X \to X'$ gleichmäßig stetig. Es sei weiterhin $(x_n)_n \subset X$ eine Cauchy-Folge. Zeigen Sie, daß dann auch $(f(x_n))_n$ eine Cauchy-Folge ist. Gilt diese Aussage auch noch, falls f lediglich stetig ist?

(ii) Es sei $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, daß f genau dann gleichmäßig stetig ist, wenn $\lim_{x\to 0, x>0} f(x)$ existiert.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Untersuchen Sie die nachfolgenden Funktionen auf gleichmäßige Stetigkeit.

(i) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$,

(ii) $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^{-2}$.

Aufgabe 3: **6 Punkte**

Es sei (X, d) ein metrischer Raum, $\emptyset \neq A \subset X$ und d_A die durch d auf A induzierte Metrik[1].Dann ist (A, d_A) ein metrischer Raum. Zeigen Sie folgende Behauptungen[2]

(i) Ist $U \subset A$ offen in X (also bezüglich d), so ist U auch offen in A (also bezüglich d_A). Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht.

(ii) Eine Menge $U \subset A$ ist genau dann offen in A, wenn es eine in X offene Menge $\tilde{U}$ gibt mit $U = \tilde{U} \cap A$.

(iii) Für welche $a > 1$ ist $(0, 1]$ abgeschlossen in $(0, a]$?

---

[1] Es ist also $d_A : A \times A \to \mathbb{R}_0^+$ mit $d_A(x, y) = d(x, y)$ für $x, y \in A$.

[2] Es mag gelegentlich helfen, sich für $x \in A$ und $\epsilon > 0$ die (in A offenen) Kugeln $B_A(x, \epsilon) := \{y \in A \,|\, d_A(x, y) < \epsilon\} = B(x, \epsilon) \cap A$ anzusehen.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Es sei (X, d) ein metrischer Raum, $A \subset X$ kompakt und $f : A \to \mathbb{R}$ *lokal beschränkt*, d.h., für jeden Punkt $x \in A$ gibt es ein $\epsilon > 0$, so daß $f|_{A \cap B(x,\epsilon)}$ beschränkt ist. Zeigen Sie, daß f auf A beschränkt ist.

Erinnerung: Ist $g : X \to Y$ und $A \subset X$, so ist $g|_A$ die Einschränkung von g auf A, d.h. $g|_A : A \to Y$ und $g|_A(x) = g(x)$ für $x \in A$.