Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. J. Behrndt, C. Kreusler

Sommersemester 2009

Analysis I

8.Übungsblatt

Abgabe vor den Tutorien am 18. Juni / 19. Juni.

Aufgabe 1: **6 Punkte**

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.

(i) Es seien (X, d) und (X', d') metrische Räume und $f : X \to X'$ stetig. Dann ist das Urbild $f^{-1}(K)$ jeder kompakten Menge $K \subset X'$ kompakt.

(ii) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $0 \notin f(\mathbb{R})$. Dann gilt $f(x)f(y) > 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

(iii) Es seien $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(x) < g(x)$ für alle $x \in [0, 1]$. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so daß sogar $f(x) + \epsilon \leq g(x)$ fur alle $x \in [0, 1]$ gilt.
Wie sieht es aus, wenn überall $[0, 1]$ durch $[0, 1]^3 = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ ersetzt wird?

(iv) Die Gleichung

$$\frac{1}{1 + x^2} = \sqrt{x}$$

ist auf $(0, \infty)$ lösbar.

Aufgabe 2: **6 Punkte**

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und injektiv. Zeigen Sie die beiden folgenden Behauptungen:

(i) Die Funktion f ist streng monoton (wachsend oder fallend).

(ii) Es sei $B := f\big([a, b]\big)$. Dann ist $f^{-1} : B \to [a, b]$ stetig.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Es sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und d eine Metrik auf X, es ist also (X, d) ein metrischer Vektorraum. Die Metrik d heißt *translationsinvariant*[1], falls

$$d(x - z, y - z) = d(x, y) \quad \text{für alle } x, y, z \in X.$$

Sie heißt *homogen*, falls

$$d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in X,\ \lambda \in \mathbb{K}.$$

Zeigen Sie, daß d genau dann von einer Norm induziert wird, wenn d translationsinvariant und homogen ist.

[1] also „unabhängig gegenüber Verschiebungen"

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+3}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} n^k a^n$, wobei sei $a \in \mathbb{R}$, $|a| < 1$ und $k \in \mathbb{N}$.

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{7^{n+1}}$

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt[n]{2}$