Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. J. Behrndt, C. Kreusler

Sommersemester 2009

Analysis I

9. Übungsblatt

Abgabe vor den Tutorien am 24. Juni / 25. Juni.

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Es seien (a_n) und (b_n) Folgen reeller Zahlen,wobei (b_n) eine beschränkte Folge sei. Es sei weiterhin $a \in \mathbb{R}$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Falls $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(a_n - a)$.

(ii) Falls $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(a_n - a)$ konvergiert, so ist $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

(iii) Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent ist, so ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergent.

(iv) Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent ist, so ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ absolut konvergent.

(v) Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent ist, so ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergent.

(vi) Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergent ist, so ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Beweisen Sie folgende Konvergenzkriterien. Dabei sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen.

(i) *(Korollar 7.13 aus der Vorlesung)* Es sei $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r.$$

Ist $r < 1$ so konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ist $r > 1$ divergiert die Reihe.

(ii) Ist (a_n) monoton fallend und $a_n \geq 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$, so konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Aufgabe 3: **6 Punkte**

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Die Exponentialfunktion[1] $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ ist streng monoton wachsend und surjektiv.

(ii) Die Umkehrabbildung $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ existiert und ist streng monoton wachsend und stetig.

(iii) Für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ sei $a^x := \exp(x \cdot \ln(a))$. Zeige, daß für $x, y \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ folgendes gilt:

$$a^{x+y} = a^x a^y \quad \text{und} \quad (ab)^x = a^x b^x.$$

[1] Erinnerung: Es ist $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ für $x \in \mathbb{R}$. Die Stetigkeit von exp auf $\mathbb{R}$ darf vorausgesetzt werden. Siehe auch große Übung.

(iv) Es gelten die Funktionalgleichungen

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \quad \text{für alle } x, y \in (0, \infty)$$

und

$$\ln(x^r) = r \ln(x) \quad \text{für alle } x \in (0, \infty), r \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Potenzreihen? Berechnen Sie den Konvergenzradius.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n^4+4n}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 x^n}{(2n)!}$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n+b^n}$ mit $a, b > 0$