Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. Jussi Behrndt
Christian Kreusler

15. April 2009

Analysis 1
Informationen

Homepage http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS09/Ana1

Personen

Dozent	Dr. Jussi Behrndt	MA 670	behrndt@math.tu-berlin.de
WiMi	Christian Kreusler	MA 363	kreusler@math.tu-berlin.de
Tutoren	Tobias Friedel		
	Max Klimm		
	Jonathan Rohleder		

Die Sprechzeiten finden sich auf der Website der Veranstaltung.

Termine

Vorlesung	Dr. Jussi Behrndt	Mo 14-16	MA 004
		Di 10-12	MA 004
Übung	Christian Kreusler	Mi 12-14	MA 004
Tutorien	siehe Website		

Aufgaben Die Übungsblätter werden jeweils mittwochs auf der o.a. Website der Veranstaltung veröffentlicht. Für die Bearbeitung habt Ihr eine Woche Zeit, die Lösungen gebt Ihr dann **vor Beginn** des Tutoriums bei Eurem Tutor ab. Die Abgabe erfolgt in **festen** Gruppen von drei Personen. Die korrigierten Abgaben erhaltet Ihr dann in der Regel eine Woche später in den Tutorien zurück.

Schein-kriterien Am Ende des Semesters wird es eine Scheinklausur geben, deren Bestehen für den Erhalt des Übungsscheins ausschlaggebend ist. Um zur Klausur zugelassen zu werden, müßt Ihr jeweils 50% der Punkte für die schriftlichen Aufgaben aus den Aufgabenblättern 1-6 und 7-12 erreichen.

Die Klausur wird voraussichtlich am 15. Juli von 12 bis 14 Uhr stattfinden, also zum Termin der letzten Übung.

Literatur Die Vorlesung folgt nicht explizit einem speziellen Lehrbuch. Der Stoff der Analysis I ist aber sehr kanonisch und wird in jedem Lehrbuch der Analysis behandelt. Diese unterscheiden sich vor allem in Bezug auf den Abstraktiosgrad, die Ausführlichkeit der Darstellung der Beweise, motivierende Randbemerkungen etc.. Wir empfehlen allen, sich einmal verschiedene Bücher z.B. in der Bibliothek anzusehen, um herauszufinden, welcher Stil einem am meisten zusagt.
Wir geben noch einen kurzen Überblick über gängige Standardwerke. Die meisten von ihnen können auch im Handapparat zur Vorlesung in der Bibliothek angesehen werden.

Wir beginnen mit einer Reihe von Lehrbüchern, von denen wir meinen, daß sie aus verschiedenen Gründen etwas näher an unserer Vorlesung sind.

(1) W. Rudin: *Analysis.* Oldenbourg, München, 2005.
Englisches Original: *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw-Hill, New-York, 1987.
Eine klare, recht abstrakte und fokusierte Darstellung: Der Stoff der Analysis I-III findet sich in diesem Buch.

(2) H. Amann, J. Escher: *Analysis I(II).* Birkhäuser, Basel/Boston/Berlin, 2008 (2006).
Die Integrationstheorie findet sich in Band 2. Der erste Band umfasst eine Vielzahl von zusätzlichen Themen.

(3) M. Barner, F. Flohr: *Analysis I.* Walter de Gruyter, Berlin/New York, 2000.
Alles in $\mathbf{R}$, keine metrischen Räume.

(4) K. Königsberger: *Analysis I.* Springer, Berlin/Heidelberg, 2004.
Größerer Fokus auf die komplexen Zahlen, keine metrischen Räume.

(5) R. Walter: *Analysis 1.* Walter de Gruyter, Berlin/New York, 2007.

(6) E. Behrends: *Analysis. Band 1 (2).* Vieweg, Wiesbaden, 2009 (2008).
Die Integrationstheorie findet sich in Band 2. Deutlich mehr motivierende Bemerkungen als die vorangegangenen Werke.

Die Reihenfolge orientiert sich in etwa an der Abstufung von *abstrakt* zu *anschaulich.*

(7) E. Hewitt. K. Stromberg: *Real and Abstract Analysis. A Modern Treatment of the Theory of Functions of a Real Variable.* Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 1975.

ist ein empfehlenswertes Buch in englischer Sprache.
Sehr schöne klassische Standardwerke der Analysis sind

(8) J. Dieudonné: *Grundzüge der modernen Analysis (Band 1).* Vieweg, Braunschweig, 1985.

(9) G.Fichtenholz: *Differential- und Integralrechnung (Band 1 und 2).* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1985. (Nachdruck: H. Deutsch Verlag, Frankfurt, 1997/1990).

(10) W. Smirnow: *Lehrgang der höheren Mathematik (Band 1).* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1986. (Nachdruck: H. Deutsch Verlag, Frankfurt, 2004).

Das Büchlein

(11) A. Beutelspacher: *„Das ist o.B.d.A trivial“.* Vieweg, Wiesbaden, 2006.

enthält eine ganze Reihe nützlicher Tips und Tricks zum „Formulieren mathematischer Gedanken“; in

(12) B. Gelbaum, J. Olmsted:*Counterexamples in Analysis.* Holden-Day , San Francisco, 1964. (Nachdruck: Dover, Mineola, 2003)

finden wir Gegenbeispiele aus allen Gebieten der Analysis. Wir schließen mit einer mitnichten vollständigen (alphabetischen) Übersicht über einige weitere moderne Lehrbücher der Analysis:

(13) O. Forster: *Analysis 1.* Vieweg, Wiesbaden, 2008.

(14) H.Heuser: *Lehrbuch der Analysis. Teil 1.* Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2009.

(15) S. Hildebrandt: *Analysis 1.* Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 2005.

(16) W. Walter: *Analysis 1.* Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 2004.

(17) V. Zorich: *Analysis 1.* Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 2006.

Aus

Wie bearbeitet man ein Übungsblatt?

von Prof. Dr. Manfred Lehn (Uni Mainz)

Übungsaufgaben spielen in der Mathematik eine zentrale Rolle. Mathematik fängt überhaupt erst da an, wo man Probleme löst. Dazu muß man das Problem analysieren und damit spielen, um es schließlich mit Phantasie und Sinn für Eleganz und Symmetrie zu lösen. Übungsaufgaben sind der natürliche Weg, diese Fähigkeiten zu erwerben.

Betrachten Sie jede Übungsaufgabe als ein intellektuelles Abenteuer. Je schwieriger die Aufgabe, desto größer das Abenteuer. Man lernt Mathematik nicht aus Büchern oder Vorlesungen, sondern nur durch Selbermachen. Genau dazu geben Ihnen die Übungen zu den Vorlesungen, die Sie besuchen, Gelegenheit. Eine einzige selbständig gelöste Übungsaufgabe ersetzt zehn nachvollzogene Beispiele in einem Lehrbuch! Es gibt keinen anderen Weg, Mathematik zu lernen. Lösen Sie also Übungsaufgaben.

Eignen Sie sich diesen Blickwinkel auf die Übungsaufgaben an. Es geht nicht darum, daß Sie sich auf die Abschlußklausur vorbereiten. Die Abschlußklausur soll umgekehrt prüfen, ob Sie gelernt haben, Probleme zu lösen.

Unter den Übungsaufgaben werden sicherlich auch einige sein, in denen der in der Vorlesung behandelte Stoff oder besprochene Verfahren eingeübt werden. Hüten Sie sich davor, nur diese zu bearbeiten. Solche Aufgaben dienen nur zum Aufwärmen. Der eigentliche Lerneffekt entsteht erst dann, wenn Sie Ihren Verstand über das schon Bekannte ein wenig hinausstrecken. Das ist wie im Sport. Übungsaufgaben sind also insbesondere etwas völlig anderes als Schulhausaufgaben. Abschreiben ist zwecklos.

Bearbeitungszeitraum oder Bearbeitungszeitpunkt?
In der Regel vergeht zwischen Ausgabe- und Abgabetermin eines Übungsblatts eine Woche. Das bedeutet, Sie haben eine Woche Zeit zum Nachdenken und Grübeln, Schmirgeln und Feilen. Diese Zeit müssen Sie vom ersten Augenblick nutzen. Wenn etwa montags der Ausgabe- und Abgabetermin ist und Sie am Samstag zum ersten Mal einen Blick auf das Blatt werfen, so haben Sie fünf volle Arbeitstage verschenkt.

Nur wenige Aufgaben sind so angelegt, daß sie einfach abgearbeitet werden können. Manche Aufgaben wird man mechanisch lösen können, etwa solche, die ein bestimmtes Rechenverfahren einüben sollen. Doch die meisten Aufgaben erwarten, daß Sie über die Lösung nachdenken. Sie können nicht erwarten, daß Sie den richtigen Einfall haben, sobald Sie gerade einmal fünf Minuten oder auch zehn Minuten aufs Blatt gestarrt haben. Viele Ideen müssen im Unterbewußtsein gären und reifen, bevor sie als Lösung ans Licht kommen. Sie müssen auch in sonst verschenkten Minuten unter der Dusche oder in der Straßenbahn oder beim Anstehen beim Bäcker über die Aufgaben nachdenken, oder zumindest Ihrem Unterbewußtsein die Möglichkeit dazu geben.

[Ich mußte mir Fragen gefallen lassen, ob ich den letzten Satz wörtlich meine. Nun: Ja und Nein. Natürlich kann und wird jeder neben der Mathematik noch andere private oder Studieninteressen haben. Aber man kann Mathematik auch nicht nebenbei betreiben. Die Mathematik ist eine sehr eifersüchtige Göttin. Das ist in jedem Falle eine persönliche Entscheidung. Aber es ist sicher eine falsche Strategie zu sagen: ich löse Übungsaufgaben nur dienstags von 16 bis 18 Uhr.]

Das geht aber nur, wenn Sie die Aufgaben kennen. Das bedeutet: Beginnen Sie mit dem Nachdenken über die Aufgaben in dem Augenblick oder in jedem Falle an dem Tag, an dem Sie das Aufgabenblatt erhalten haben. Ersetzen Sie also den Zeitpunkt der Bearbeitung durch einen Zeitraum, und zwar den maximal möglichen. Schöpfen Sie diesen Zeitraum voll aus: auch und gerade wenn Sie etwa schon eine Lösung haben, kann es lohnen, darüber nachzudenken, ob man diese Lösung vereinfachen oder eleganter machen kann, oder ob es noch eine ganz andere Lösung gibt.

Es klingt banal zu bemerken, daß man nur Aufgaben lösen kann, die man kennt. Sie können nur dann im Stehen oder Liegen über eine Lösung nachdenken, wenn Sie die Aufgabe formulieren können, ohne aufs Blatt zu schauen. Wohlgemerkt, Sie sollen die Aufgaben nicht auswendig lernen, sondern verstehen. Dazu müssen Sie über die Aufgabe bei der ersten Lektüre mindestens solange nachdenken, daß Sie die Aufgabenstellung in eigenen Worten wiederholen können, d.h. Sie müssen die Aufgabe jederzeit einem Kommilitonen erklären können. Formulieren Sie also die Aufgabenstellung in eigenen Worten ohne Rückgriff auf das Aufgabenblatt.

Versuchen Sie immer, alle Aufgaben zu bearbeiten und nicht nur die, die Ihnen leicht fallen oder die zufällig am Anfang stehen. Der Lerneffekt ist um so größer, je schwieriger die Aufgabe ist und je länger Sie zur Lösung gebraucht haben. Ein großer Teil des Reizes des Mathematikstudiums liegt in den Erfolgserlebnissen gelöster Aufgaben.

Analyse der Aufgabenstellung

Es ist klar, daß wir uns als Erstes aller in der Aufgabenstellung verwendeten Begriffe versichern müssen. Wiederholen Sie also gegebenenfalls die Definitionen aller vorkommenden Begriffe. Sie müssen in jedem Falle sicherstellen, daß Sie mit diesen Begriffen nicht nur verschwommene Vorstellungen verbinden, sondern präzise Definitionen. Andererseits sind Begriffsdefinitionen allein häufig noch hohl. Die Bedeutung eines Begriffs wird erst durch die Menge aller Sätze gegeben, die über diesen Begriff gemacht werden. Rufen Sie sich also die wesentlichen Eigenschaften der Begriffe in Erinnerung und in welcher Beziehung sie zueinander stehen.

Die nächste Frage könnte sein: In welchen Sätzen kommen die Begriffe aus der Übungsaufgabe vor? Ist die Übungsaufgabe zum Beispiel ein einfacher Spezialfall eines schon bewiesenen Satzes aus der Vorlesung? Oder verallgemeinert die Übungsaufgabe einen Satz aus der Vorlesung?

Wenn in der Aufgabe ein allgemeiner Sachverhalt behauptet wird, machen Sie sich an einfachen Beispielen (=Spezialfällen) klar, daß die Behauptung wirklich richtig ist, oder auch nur, was denn eigentlich die Behauptung konkret sagt. Wenn man genügend viele Beispiele oder besser: die richtigen Beispiele kennt, so erkennt man häufig auch, warum die Behauptung richtig ist, d.h. findet einen Beweis dafür.

Versuchen Sie, die Aufgabenstellung zu verbildlichen. Reelle Funktionen kann man zeichnen. Wenn nach geometrischen Konfigurationen gefragt ist, malt man sich diese erst einmal auf. Auch in rein mengentheoretischen Konstruktionen sind schematische Bilder nützlich.

Überlegen Sie, welche Beweismethoden in der Vorlesung im Zusammenhang mit den Begriffen aus der Aufgabe vorkamen. Kann man diese Methoden für die Aufgabe verwenden? Selten wird man von Ihnen erwarten, daß Sie einen genialischen neuen Einfall haben. Trauen Sie Ihrer Intuition. Fallen Ihnen Situationen ein, an die Sie durch die Aufgabe erinnert werden?

Ein anderer möglicher Trick ist, die zu beweisende Behauptung anzuzweifeln. Um sie zu widerlegen, würde es genügen, ein Gegenbeispiel zu konstruieren. Wenn sich eine Behauptung gegen den Beweis sträubt, versuchen Sie also ein Gegenbeispiel zu erfinden. Wir wissen natürlich, daß das nicht geht (es sei denn, die Aufgabenstellung ist falsch). Aber entscheidend ist die Frage, warum es nicht geht. Wenn Sie also mit Raffinesse Ihr Gegenbeispiel aufbauen, aber immer wieder von den Tatsachen eingeholt werden, wird vielleicht allmählich eine Struktur deutlich, die zu einem Beweis führt. Das ist sozusagen der dialektische Zugang.

Versuchen Sie, auf vielen verschiedenen Wegen an die Lösung heranzukommen.

Reden Sie über die Aufgaben!

Grundsätzlich gilt: Man soll möglichst viel über Mathematik reden. Reden hilft, die eigenen Gedanken zu ordnen. Sie können mit Ihren Kommilitonen oder Ihrem Übungsgruppenleiter über die Aufgabenstellung, Lösungsansätze und die Lösung reden.

In jedem Falle gilt, daß Sie vorher nachgedacht haben müssen, wenn das Gespräch nutzen soll:

Sie können über die Aufgabenstellung, also Druckfehler, mathematische Fehler, Absicht der Aufgabe, Präzisierung der Aufgabe usw. nur dann reden, wenn Sie genau genug gelesen haben, um zu erkennen, ob die Aufgabe sinnvoll formuliert ist.

Ebenso ist es nur dann sinnvoll, über Lösungsansätze zu reden, wenn Sie schon Lösungsansätze durchdacht haben, aber vielleicht in einer Sackgasse gelandet sind. Dann können Sie solche Ansätze oder halbfertige Lösungen mit Kommilitonen austauschen und diskutieren. Andernfalls geht Ihnen das Aha-Erlebnis und damit der Zweck der Aufgabe verloren.

Gruppenarbeit kann bei der Bearbeitung der Aufgaben sinnvoll sein, wenn das Kräfteverhältnis ausgewogen und das Geben und Nehmen wechselseitig ist. Letztlich werden Sie an Ihren eigenen Fähigkeiten gemessen. Insbesonder heißt das nicht, daß Sie sich Lösungen erklären lassen sollen. Das können Sie natürlich tun, wenn Sie sich darüber im Klaren sind, daß mindestens die Hälfte des Übungseffektes dabei verloren geht. Wenn Sie schon eine Lösung haben, kann es sehr lehrreich sein, die eigene Lösung der Kritik anderer auszusetzen oder zu sehen, wie andere dasselbe Problem angehen.

Aber: Bei allem Reden darf nie das konzentrierte Nachdenken allein zu kurz kommen.

Wenn Sie eine Lösung gefunden zu haben glauben, sollten Sie auch in der Lage sein, diese Lösung einem anderen zu erklären. Wenn Ihnen dabei die Worte fehlen oder wenn Sie dabei in ein "Na ja, irgendwie so..." abrutschen, dann ist das ein Hinweis darauf, daß in Ihrem Verständnis noch eine kleine Lücke ist.

Der Moment des Aufschreibens

Der Augenblick der schriftlichen Fixierung ist ein kritischer Moment. Jetzt stellt sich heraus, ob die im Geiste gefundene oder geahnte Lösung sich wirklich hinschreiben läßt. Jede richtige Lösung läßt sich auch in angemessener Weise niederschreiben. Wenn Sie Schwierigkeiten haben, Ihre Gedanken geordnet aufs Papier zu bringen, dann liegt das daran, daß Ihre Gedanken noch nicht genügend geordnet sind. Legen Sie die Feder wieder hin und denken Sie noch ein wenig nach. Überlassen Sie es auf keinen Fall dem Korrektor oder Übungsgruppenleiter, Ihre hingeworfenen Gedankenfetzen zu ordnen.

Es gibt bei schriftlichen Lösungen zwei Extreme, die beide wenig zufriedenstellend sind. Das eine Extrem ist eine reine Rechnung ohne argumentierenden oder kommentierenden Text. Das andere Extrem ist der Roman, der um das Problem herumredet. Die Wahrheit liegt irgendwo dazwischen.

Der eigentliche Gegenstand der Argumentation werden gewisse definierte Objekte sein, logische oder mathematische Beziehungen zwischen diesen oder Rechnungen. Der Text hat die Aufgabe, den logischen Stellenwert dieser mathematischen Bausteine zu klären. Ein und dieselbe mathematische

Phrase, etwa "x< n", hat ganz verschiedene Bedeutungen je nachdem, ob im Text vorher steht: "Wir können also ohne Einschränkung annehmen, daß ..." oder "Hieraus schließen wir, daß ...." oder "angenommen, es gilt..." . Die Aufgabe des umgangssprachlichen Textes ist es, die Bedeutung der Formelfragmente im Gesamtzusammenhang festzulegen.

Eine Lösung zu einer Aufgabe besteht aus einem umgangssprachlichen schriftlichen Text in deutscher Sprache. Deutsch steht hier nicht im Gegensatz zu Englisch oder Russisch, sondern im Gegensatz zu Mathsprech oder irgendeiner anderen korrumpierten Kommunikationsform. Ihre Argumentation soll formaler Strenge genügen, nicht die Sprache. Schreiben Sie gute Prosa.

Ihr Text soll also aus ganzen Sätzen bestehen. Jeder Satz enthält ein Subjekt und ein Prädikat. Vermeiden Sie Ketten von logischen Symbolen. Vermeiden Sie aber auch umständliche verbale Umschreibungen, wenn es dafür eine konzise Symbolik gibt. Hier ist die Vorlesung nicht immer Vorbild! Aber die Vorlesung ist eine im wesentlichen mündliche Veranstaltung. Textgestaltung an der Tafel hat andere Aufgaben als Textgestaltung auf dem Papier.

Jede richtige Lösung läßt sich auch richtig ausdrücken.

Mit der Zeit werden Sie Ihren eigenen Stil entwickeln. Das gelingt nur, wenn Sie sich mit den Aufgaben Mühe geben und Ihre Lösungen wirklich als Texte auffassen, auch wenn diese natürlich immer wieder durch Rechnungen unterbrochen sein werden. Ihre Lösung muß auch einem Leser verständlich sein, der nur die Aufgabenstellung, aber nicht selbst die Lösung kennt. Noch einmal: Sie sollen nicht einen wissenden Leser durch obskure Hinweise davon überzeugen, daß Sie selbst auch die Lösung verstanden haben, sondern Sie sollen so schreiben, daß ein unwissender Leser die Lösung versteht.

Ihre Aufgaben müssen in einer lesbaren Handschrift geschrieben sein, Formeln und Symbole sollten sorgfältig und sauber ausgeführt sein. Wenn Sie es noch nicht können, lernen Sie die griechische Schrift und die deutsche Frakturschrift nach Sütterlin. Auch in Formeln gibt es große und kleine Buchstaben. Symbole, die als Indizes oder Exponenten auftauchen, müssen auch wirklich sichtbar unter oder über der Hauptlinie stehen; in der Regel sind sie etwas kleiner. Klammern Sie so, daß man auf Anhieb sieht, welche Klammerpaare zusammengehören.

Wenn Sie einen guten Übungsgruppenleiter haben, wird er auch bei richtigem Ergebnis nicht einfach einen Haken plazieren, sondern rigoros Ihren Stil korrigieren. Das erste Studienjahr hat unter anderem die Aufgabe, Ihnen Lesen und Schreiben beizubringen.

Geben Sie niemals die erste Version Ihrer Niederschrift ab. Fertigen Sie in jedem Falle mindestens eine saubere Abschrift Ihrer Lösungen an! Einen Text, in dem mehrfach Korrekturen angebracht sind, in dem ganze Passagen durchgestrichen und neu gesetzt sind, bei dem der Leser aufgefordert wird, Ergänzungen von der letzten Seite einzuschieben, sollte man niemandem vorlegen. Lesen Sie Ihren Text auch unter dem folgenden Gesichtspunkt noch einmal durch: Überzeugt die Argumentation des Textes Sie eigentlich selbst? Mal ganz ehrlich? Wenn nicht, fangen Sie von vorn an. Das ganze ist ein harter, manchmal mühseliger Vorgang. Aber der Stolz auf eine gleichermaßen richtige wie schöne Lösung wird Sie entschädigen.

...