Klausur - Analysis I
Lösungsskizzen

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Kennzeichnen Sie wahre Aussagen mit **W** und falsche Aussagen mit **F**. Es sind keine Begründungen nötig. Für jede richtige Antwort gibt es einen halben Punkt, für jede falsche wird ein halber Punkt abgezogen, nicht beantwortete Teilaufgaben werden nicht bewertet. Die minimale Gesamtpunktzahl ist Null.

$\boxed{\text{F}}$ Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen reeller Zahlen mit $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$.

$\boxed{\text{W}}$ Jede beschränkte Folge reeller Zahlen enthält eine Teilfolge, die eine Cauchy-Folge ist.

$\boxed{\text{F}}$ Jede reelle Zahlenfolge, die einen Häufungspunkt besitzt, ist beschränkt.

$\boxed{\text{F}}$ Jede abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$ enthält ein größtes Element.

$\boxed{\text{W}}$ Jede endliche Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ ist abgeschlossen.

$\boxed{\text{W}}$ Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Falls

$$\forall \epsilon \geq 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} : \ |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon,$$

so ist f stetig in x_0.

$\boxed{\text{W}}$ Es gibt gleichmäßig stetige, aber unbeschränkte Funktionen.

$\boxed{\text{W}}$ Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $A, B \subset X$. Ist A kompakt und B abgeschlossen, so ist $A \cap B$ kompakt.

$\boxed{\text{W}}$ Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann gilt: $(f(x_0+h) - f(x_0) - hf'(x_0)) \to 0$ für $h \to 0$.

$\boxed{\text{F}}$ Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt $f'(x) \leq g'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

---

ad (i) Betrachte z.B. $a_n = 0$, $b_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim_{n\to\infty} b_n$.

ad (ii) Nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass besitzt jede beschränkte Folge reeller Zahlen eine konvergente Teilfolge und jede konvergente Folge ist insbesondere eine Cauchy-Folge.

ad (iii) Betrachte z.B. $a_n = n^{(-1)^n}$. Dann konvergiert die Teilfolge $(a_{2n+1}) = (1/2n + 1)$ gegen Null (also ist Null Häufungspunkt der Folge), aber die Teilfolge $(a_{2n}) = (2n)$ und damit die ganze Folge ist unbeschränkt.

ad (iv) Zum Beispiel ist die Menge $\mathbb{R}$ in sich abgeschlossen, enthält aber kein größtes Element.

ad (v) In einer Übungsaufgabe wurde bewiesen, daß jede endliche Teilmenge eines metrischen Raumes kompakt ist. Damit ist sie auch abgeschlossen.

ad (vi) Es sind nur die $\geq$ / $\leq$ zu rechtfertigen. Ist die Bedingung für alle $\epsilon \geq 0$ erfüllt, so insbesondere für alle $\epsilon > 0$. Durch den Übergang von ϵ auf $\epsilon/2$ kann das $\leq$ gerechtfertigt werden.

ad (vii) Betrachte z.B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

ad (viii) A ist kompakt, also abgeschlossen und der Schnitt abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen, also ist $A \cap B$ eine abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge A, also selbst kompkat (wie in einer Übungsaufgabe gezeigt wurde).

ad (ix) Nach der Definition der Differenzierbarkeit gibt es eine stetige Funktion r mit $r(x_0) = 0$, so daß $(f(x_0 + h) - f(x_0) - hf'(x_0)) = r(x_0 + h)h \to 0$ für $h \to 0$.

ad (x) Es ist z.B. $f(x) = \sin(x) \leq 2 = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, aber $\sin'(0) = \cos(0) = 1 > 0 = g'(0)$.

Klausur - Analysis I

Lösungsskizzen

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Kennzeichnen Sie wahre Aussagen mit **W** und falsche Aussagen mit **F**. Es sind keine Begründungen nötig. Für jede richtige Antwort gibt es einen halben Punkt, für jede falsche wird ein halber Punkt abgezogen, nicht beantwortete Teilaufgaben werden nicht bewertet. Die minimale Gesamtpunktzahl ist Null.

- $\boxed{\text{F}}$ Jede reelle Zahlenfolge, die einen Häufungspunkt besitzt, ist beschränkt.
- $\boxed{\text{W}}$ Jede beschränkte Folge reeller Zahlen enthält eine Teilfolge, die eine Cauchy-Folge ist.
- $\boxed{\text{F}}$ Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen reeller Zahlen mit $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$.
- $\boxed{\text{W}}$ Jede endliche Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ ist abgeschlossen.
- $\boxed{\text{F}}$ Jede abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$ enthält ein größtes Element.
- $\boxed{\text{W}}$ Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $A, B \subset X$. Ist A kompakt und B abgeschlossen, so ist $A \cap B$ kompakt.
- $\boxed{\text{W}}$ Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Falls

  $$\forall \epsilon \geq 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R} : \; |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon,$$

  so ist f stetig in x_0.
- $\boxed{\text{W}}$ Es gibt gleichmäßig stetige, aber unbeschränkte Funktionen.
- $\boxed{\text{F}}$ Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt $f'(x) \leq g'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- $\boxed{\text{W}}$ Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann gilt: $(f(x_0+h) - f(x_0) - hf'(x_0)) \to 0$ für $h \to 0$.

---

ad (i) Betrachte z.B. $a_n = n^{(-1)^n}$. Dann konvergiert die Teilfolge $(a_{2n+1}) = (1/2n+1)$ gegen Null (also ist Null Häufungspunkt der Folge), aber die Teilfolge $(a_{2n}) = (2n)$ und damit die ganze Folge ist unbeschränkt.

ad (ii) Nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass besitzt jede beschränkte Folge reeller Zahlen eine konvergente Teilfolge und jede konvergente Folge ist insbesondere eine Cauchy-Folge.

ad (iii) Betrachte z.B. $a_n = 0$, $b_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim_{n\to\infty} b_n$.

ad (iv) In einer Übungsaufgabe wurde bewiesen, daß jede endliche Teilmenge eines metrischen Raumes kompakt ist. Damit ist sie auch abgeschlossen.

ad (v) Zum Beispiel ist die Menge $\mathbb{R}$ in sich abgeschlossen, enthält aber kein größtes Element.

ad (vi) A ist kompakt, also abgeschlossen und der Schnitt abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen, also ist $A \cap B$ eine abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge A, also selbst kompkat (wie in einer Übungsaufgabe gezeigt wurde).

ad (vii) Es sind nur die $\geq$ / $\leq$ zu rechtfertigen. Ist die Bedingung für alle $\epsilon \geq 0$ erfüllt, so insbesondere für alle $\epsilon > 0$. Durch den Übergang von ϵ auf $\epsilon/2$ kann das $\leq$ gerechtfertigt werden.

ad (viii) Betrachte z.B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

ad (ix) Es ist z.B. $f(x) = \sin(x) \leq 2 = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, aber $\sin'(0) = \cos(0) = 1 > 0 = g'(0)$.

ad (x) Nach der Definition der Differenzierbarkeit gibt es eine stetige Funktion r mit $r(x_0) = 0$, so daß $(f(x_0 + h) - f(x_0) - hf'(x_0)) = r(x_0 + h)h \to 0$ für $h \to 0$.

Aufgabe 2: **3 Punkte**

Es sei (X, d) ein metrischer Raum, $x_0 \in X$ und $R > 0$. Zeigen Sie, daß die Menge

$$B(x_0, R) := \{x \in X \mid d(x, x_0) < R\}$$

eine offene Menge ist.

Sei $x \in B(x_0, R)$ beliebig. Dann ist $d(x, x_0) < R$, also

$$\epsilon := R - d(x, x_0) > 0,$$

und die Kugel $B(x, \epsilon)$ ist in $B(x_0, R)$ enthalten:
Sei $y \in B(x, \epsilon)$, also $d(y, x) < \epsilon$. Dann ist mit der Dreiecksungleichung

$$d(y, x_0) \leq d(y, x) + d(x, x_0) < \epsilon + d(x, x_0) = R - d(x, x_0) + d(x, x_0) = R,$$

also $y \in B(x_0, R)$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Aufgabe 3: **5 Punkte**

(i) Es sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen mit positivem Grenzwert (also Grenzwert > 0). Zeigen Sie, daß alle bis auf endlich viele Folgenglieder von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positiv sind.

(ii) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die durch

$$a_1 := \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad a_{n+1} := a_n^2 + \frac{|a_n|}{3}, \quad n \in \mathbb{N},$$

rekursiv definierte Folge.

(a) Zeigen Sie, daß $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Zeigen Sie weiterhin (z.B. mit vollständiger Induktion), daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge ist.

(c) Entscheiden Sie schließlich, ob $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(i) Es sei $\lim_{n\to\infty} b_n =: b > 0$. Wir setzen $\epsilon := b/2 > 0$. Nach der Definition der Konvergenz gibt es somit ein $N > 0$, so daß

$$|b_n - b| < \epsilon \qquad \text{für alle } n > N$$

oder äquivalent dazu

$$b - \epsilon < b_n < b + \epsilon \qquad \text{für alle } n > N.$$

Da $b - \epsilon = b - b/2 = b/2 > 0$ ist, folgt insbesondere, daß

$$b_n > 0 \qquad \text{für alle } n > N.$$

Somit können höchstens die endlich vielen Folgenglieder $\{b_1, \ldots, b_N\}$ nichtpositiv sein.

(ii) (a) Da $a_1 = 1/2 > 0$ und $a_{n+1} = a_n^2 + |a_n| \geq 0$ (da Quadrat und Betrag nichtnegativ sind), so ist die Behauptung beweisen. Insbesondere ist $a_{n+1} = a_n^2 + a_n/3$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) I.A.: Es ist $a_2 = a_1^2 + a_1/3 = 1/4 + 1/6 = 5/12 < 1/2 = a_1$.
I.V.: Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, sei $a_n < a_{n-1}$.
I.S. ($n \to n+1$): Da für $0 < x < y$ auch $x^2 < y^2$ ist, so folgt

$$a_{n+1} = a_n^2 + a_n/3 < a_{n-1}^2 + a_{n-1}/3 = a_n.$$

Somit ist (a_n) monoton fallend.

(c) Da (a_n) monoton fällt und nach unten durch 0 beschränkt ist, so konvergiert (a_n), wir setzen $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Da mit (a_n) auch (a_{n+1}) gegen a konvergiert, so folgt

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (a_n^2 + a_n/3) = a^2 + a/3,$$

also $a = 0$ oder $a = 2/3$. Da aber (a_n) monoton fällt und bereits $a_1 = 1/2 < 2/3$ ist, so muß $a = 0$ gelten.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

(i) Bestimmen Sie eine reelle Zahl a so, daß die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{x}, & \text{falls } x > 0, \\ a\sqrt{1-x}, & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

stetig auf $\mathbb{R}$ ist.

(ii) Geben Sie ein Beispiel einer stetigen, aber nicht gleichmäßig stetigen Funktion auf dem halboffenen Intervall $(0, 1]$ an (ohne Beweis).
Ist dies auch möglich auf dem Intervall $[0, 1]$? (Mit Begründung!)

(i) Die Funktion f ist im inneren Punkt $x_0 = 0$ des Definitionsbereiches stetig, falls rechts- und linksseitiger Grenzwert in 0 existieren und mit $f(0) = a$ übereinstimmen.
Da die Wurzelfunktion stetig ist, so gilt

$$\lim_{x \to 0, x<0} f(x) = \lim_{x \to 0, x<0} a\sqrt{1-x} = a = f(0).$$

Mit der Regel von L'Hospital folgt für den rechtsseitigen Grenzwert

$$\lim_{x \to 0, x>0} f(x) = \lim_{x \to 0, x>0} \frac{\sin(\pi x)}{x} = \lim_{x \to 0, x>0} \frac{\pi \cos(\pi x)}{1} = \pi.$$

Somit ist f stetig auf ganz $\mathbb{R}$ mit $a = \pi$.

(ii) Aus der VL bekannt ist die Funktion $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$, welche stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist.
Auf $[0, 1]$ kann es eine solche Funktion nicht geben, denn $[0, 1]$ ist (nach dem Satz von Heine-Borel) kompakt und auf einer kompakten Menge ist jede stetige Funktion auch gleichmäßig stetig.

Aufgabe 5: **4 Punkte**

Bestimmen Sie **alle** $x \in \mathbb{R}$, für die die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x+1)^n}{n}$$

konvergiert.

Wir bestimmen zuerst den Konvergenzradius ρ. Es ist

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n} \frac{n+1}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \frac{n+1}{n} = 1/2.$$

Da der Entwicklungspunkt der Potenzreihe $x_0 = -1$ ist, so konvergiert die Potenzreihe jedenfalls für alle $x \in (-3/2, -1/2)$ und divergiert für $x < -3/2$ oder $x > -1/2$.
Es verbleibt, die Randpunkte $x_1 = -3/2$ und $x_2 = -1/2$ zu untersuchen:
$x_1 = -3/2$: Wir betrachten also die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x_1+1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} (-1/2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} (-1)^n \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^n.$$

Da $(1/n)$ monoton gegen Null fällt, so konvergiert die Reihe nach dem Leibniz-Kriterium.
$x_2 = -1/2$: Wir betrachten also die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x_2+1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} (1/2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Dies ist die harmonische Reihe, welche bekanntermaßen divergiert.
Somit konvergiert die Potenzreihe genau für $x \in [-3/2, -1/2)$.

Aufgabe 6: **4 Punkte**

Bestimmen Sie den punktweisen Grenzwert der Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$f_n : [0,\pi] \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = (1-\sin(x))^n, \quad x \in [0,\pi],$$

und entscheiden Sie, ob $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert (Beweisen Sie Ihre Antwort!).

Sei $x = 0$. Dann ist für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n(0) = (1-\sin(0))^n = (1-0)^n = 1,$$

also $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 1$.
Desgleichen für $x = \pi$: Dann ist für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n(\pi) = (1-\sin(\pi))^n = (1-0)^n = 1,$$

also $\lim_{n\to\infty} f_n(\pi) = 1$.
Für $0 < x < \pi$ folgt $0 < \sin(x) \leq 1$, also $0 \leq (1-\sin(x)) < 1$ und damit

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} (1-\sin(x))^n = 0.$$

Somit konvergiert (f_n) punktweise gegen die Funktion $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{für } x = 0 \\ 0, & \text{für } 0 < x < \pi \\ 1, & \text{für } x = \pi. \end{cases}$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist f_n als Komposition stetiger Funktionen stetig. Da der gleichmäßige Grenzwert einer Folge stetiger Funktionen auf einer kompakten Menge wieder eine stetige Funktion ist, kann (f_n) auf dem Kompaktum $[0,\pi]$ nicht gleichmäßig gegen f konvergieren, denn f ist nicht stetig.
Somit konvergiert (f_n) zwar punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen f.

Aufgabe 7: **3 Punkte**

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und f' stetig. Es sei weiterhin $f(0) = 0$, $f(1) = 2$ und $f(2) = 1$. Zeigen Sie, daß f' mindestens eine Nullstelle besitzt.

Da f insbesondere auf $[0, 1]$ stetig ist und da $f(0) = 0 < 1 < 2 = f(1)$ ist, so gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $x_0 \in [0, 1]$ mit $f(x_0) = 1$.
Da f insbesondere auf $[x_0, 2]$ stetig und auf $(x_0, 2)$ differenzierbar ist, und da $f(x_0) = 1 = f(2)$ ist, gibt es nach dem Satz von Rolle eine Stelle $x_1 \in [x_0, 2] \subset \mathbb{R}$ mit $f'(x_1) = 0$.