Lösungsskizzen

Aufgabe 1:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N} : n < m$

Verneinung: $\exists n \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N} : n \geq m$

(ii) $p :=$ „Es ist heiß"

$q :=$ „Das Eis schmilzt"

$r :=$ „Ich habe einen Eisschrank"

z.B. so: $((p \wedge r) \Rightarrow \neg q) \wedge ((p \wedge \neg r) \Rightarrow q)$

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}_0\ \exists k \in \{0, 1\}\ \exists l \in \mathbb{N}_0 : n = k + 2l$

Verneinung:

$\exists n \in \mathbb{N}_0\ \forall k \in \{0, 1\}\ \forall l \in \mathbb{N}_0 : n \neq k + 2l$.

Aufgabe 2:

Wir machen einen Ringschluß und zeigen z.B.

(i) $\Rightarrow$ (ii),
(ii) $\Rightarrow$ (iii),
(iii) $\Rightarrow$ (iv),
(iv) $\Rightarrow$ (i):

(i) $\Rightarrow$ (ii) Es sei $A \subset B$. z.z ist $A \cup B = B$, also $A \cup B \subset B$ und $B \subset A \cup B$:

(a) $B \subset A \cup B$:

Sei $x \in B$ bel. Da $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ folgt unmittelbar $x \in A \cup B$.
(Hier geht (i) nicht ein.)

(b) $A \cup B \subset B$:

Sei $x \in A \cup B$, d.h. $x \in A \vee x \in B$.
Zu zeigen ist $x \in B$:
Dies ist natürlich der Fall, falls $x \in B$ ist.
Ist $x \in A$, so folgt wegen $A \subset B$ auch $x \in B$.
Da $x \in A \cup B$ bel. gewählt war, folgt $A \cup B \subset B$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sei $A \cup B = B$. Zu zeigen ist $A \cap B = A$, also $A \cap B \subset A$ und $A \cap B \supset A$:

(a) Wieder gilt $A \cap B \subset A$ allgemein:
Sei $x \in A \cap B$, also $x \in A$ und $x \in B$. Insb. ist $x \in A$, also $A \cap B \subset A$.

(b) Sei $x \in A$. z.z. ist $x \in A \cap B$, es ist also noch $x \in B$ zu zeigen.

Da $x \in A \subset A \cup B$ und nach (ii) $A \cup B = B$,
folgt $\underline{x \in} A \subset A \cup B = \underline{B}$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Sei $A \cap B = A$. Zu zeigen ist $A \setminus B = \emptyset$.
Widerspruchsbeweis:
Angenommen $A \setminus B \neq \emptyset$, es gibt also $x \in A \setminus B$,
d.h. $x \in A$ und $x \notin B$.
Nach (iii) ist $A = A \cap B$, also $x \in A \cap B$ und
damit insbesondere $x \in B$. $\lightning$ (Widerspruch).

(iv) $\Rightarrow$ (i) Sei $A \setminus B = \emptyset$. z.z. ist $A \subset B$.
Widerspruchsbeweis:
Ang. $\neg(A \subset B)$, es gibt also $x \in A : x \notin B$.
Dann ist aber nach Definition von $A \setminus B$
$x \in A \setminus B$. $\lightning$ Dies ist ein Widerspruch. $\blacksquare$

Aufgabe 3:

(i) Sei $A \subset B$. z.z. ist $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.

Sei also $x \in f^{-1}(A)$, also $f(x) \in A$.

z.z. ist $x \in f^{-1}(B)$, also $f(x) \in B$.

Dies folgt direkt aus $A \subset B$. □

(ii) (a) „$\subset$": Wir zeigen $f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$:

Sei $x \in f^{-1}(A \cap B)$, also $f(x) \in A \cap B$.

Dann ist insbesondere

$f(x) \in A$, also $x \in f^{-1}(A)$

und $f(x) \in B$, also $x \in f^{-1}(B)$,

und somit $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

„$\supset$" Wir zeigen $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cap B)$:

Sei $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, also

$x \in f^{-1}(A)$, woraus $f(x) \in A$ folgt,

und $x \in f^{-1}(B)$, woraus $f(x) \in B$ folgt.

Insgesamt ist also $f(x) \in A \cap B$, woraus wir auf $x \in f^{-1}(A \cap B)$ schließen. □

(iii) Nach Definition ist

$$f^{-1}(f(C)) = \{x \in X \mid f(x) \in f(C)\}.$$

Sei $x \in C$. Zu zeigen ist $x \in f^{-1}(f(C))$, also $f(x) \in f(C)$, was aus der Def. von $f(C)$ folgt. □

Gleichheit gilt i.A. nicht: Gegenbsp.:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) := 0$. Mit $C = [0,1] \subset \mathbb{R}$ folgt

$f(C) = \{0\}$ und $f^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R} \supsetneq [0,1]$.

((4)): Bereits in der Übung:

$p \Rightarrow q$ und $\neg q \Rightarrow \neg p$ sind logisch gleichwertig.

Man kann das auch „direkt" zeigen:

„$\Rightarrow$" Sei $x_1 \neq x_2$. Angenommen, es gelte

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Dann folgt nach Voraus. $x_1 = x_2$, ↯.

Also $f(x_1) \neq f(x_2)$.

„$\Leftarrow$" Sei $f(x_1) = f(x_2)$. Ang., es gelte

$$x_1 \neq x_2.$$

Nach Voraus. gilt dann $f(x_1) \neq f(x_2)$ ↯.

Also folgt $x_1 = x_2$.

$\square$

5. Aufgabe:

(i) Seien f und g injektiv.

z.z. ist, daß $f \circ g$ injektiv ist, daß also aus $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$,

$(f \circ g)(x_1) \neq (f \circ g)(x_2)$

folgt:

Seien also $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, bel. gewählt.

Da f inj. ist, so ist

$f(x_1) \neq f(x_2)$.

Da g inj. ist, so folgt

$g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$, nach Definition der Komposition von Funktionen also

$(g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)$, was zu zeigen war.

$\square$

(ii) Sei nun $g \circ f$ inj.; zu zeigen ist, daß auch f injektiv ist, daß also aus

$x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$:

$f(x_1) \neq f(x_2)$ folgt:

Widerspruchsbeweis: Ang. es gebe $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Dann aber folgt $(g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2)$, was ein Widerspruch zur Inj. von $g \circ f$ ist.

$\square$