Lösungsskizzen

Aufgabe 1:

(i) Sei $\varepsilon > 0$ bel. und $f_n \to f$, $g_n \to g$ gleichm.
Dann gibt es $n_0 > 0$: $\forall n \geq n_0$:

$$\sup_{t \in X} |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon/2$$

und $n_1 > 0$: $\forall n \geq n_1$: $\sup_{t \in X} |g_n(t) - g(t)| < \varepsilon/2$

Für $n \geq \hat{n} := \max\{n_0, n_1\}$ ist dann

$$\sup_{t \in X} |f_n(t) + g_n(t) - (f(t) + g(t))| \leq$$

$$\leq \sup_{t \in X} \left(|f_n(t) - f(t)| + |g_n(t) - g(t)| \right)$$

$$\leq \sup_{t \in X} |f_n(t) - f(t)| + \sup_{t \in X} |g_n(t) - g(t)| = \varepsilon .$$

(ii) Mit $f, g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(t) = x$, $g(t) = 0$, $x \in (0,\infty)$, ist
$f_n \to f$ und $g_n \to g$ gleichmäßig:
Es ist

$$\sup_{x \in (0,\infty)} |f_n(t) - f(t)| = \sup_{x \in (0,\infty)} |x - x| = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

und

$$\sup_{x \in (0,\infty)} |g_n(t) - g(t)| = \sup_{x \in (0,\infty)} \left|\tfrac{1}{n} - 0\right| = \tfrac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad ;$$

Es ist aber $f_n(t) \cdot g_n(t) = \frac{t}{n}$.
Für bel. $t \in (0,\infty)$ gilt:

$$|f_n(t) \cdot g_n(t) - 0| = \left|\tfrac{t}{n} - 0\right| = \tfrac{t}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 , \text{ also}$$

$f_n \cdot g_n \to 0$ <u>pktw.</u>, aber es ist mit $\varepsilon = 1$:
Für bel. $n_0 > 0$ wählen wir ein bel. $n \geq n_0$ und $t > \frac{1}{n}$. Dann:
$|f_n(t) g_n(t) - 0| = \left|\frac{t}{n}\right| > 1 = \varepsilon$, also konv.
$f_n g_n$ nicht gleichmäßig.

Aufgabe 2:

Für $x = 0$ gilt:

$$f_n(0) = \frac{1}{1+0} = 1 \quad \text{und}$$

$$g_n(0) = \frac{0}{1+0} = 0 .$$

Für $x > 0$ gilt:

$$|f_n(x)| = \frac{1}{1+nx} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\frac{1}{n}+x}\right) < \frac{1}{n}\underbrace{\frac{1}{x}}_{=:c<\infty} = c \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

und

$$|g_n(x)| = \frac{x}{1+nx} = \frac{1}{n}\left(\frac{x}{\frac{1}{n}+x}\right) < \frac{1}{n}\left(\frac{x}{x}\right) = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

Also konvergiert $f_n \to f$ und $g_n \to g$ pktw. mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$g(x) = 0 \quad \forall x \geq 0 .$$

f_n konvergiert nicht glm., denn

$$\sup_{x \geq 0} |f_n(x) - \cancel{f(x)}| \geq \sup_{x > 0} \frac{1}{1+nx} \underset{x = 1/n}{\geq} \frac{1}{1+n \cdot 1/n} = \frac{1}{2} \not\to 0$$

g_n konv. glm., denn

$$\sup_{x \geq 0} |g_n(x) - g(x)| = \sup_{x \geq 0} \frac{x}{1+nx} \overset{\text{s.o.}}{\leq} \sup_{x \geq 0} \frac{1}{n} \cdot 1 = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

Aufgabe 3:

Sei $x \in [a,b]$ bel. Dann ist

$$|(f \circ g)(x)| = |f(g(x))| \leq \sup_{y \in [a,b]} |f(y)| = \|f\|_\infty,$$

also auch

$$\|f \circ g\|_\infty = \sup_{x \in X} |(f \circ g)(x)| \leq \|f\|_\infty.$$

Falls g surjektiv ist, gilt Gleichheit, denn sonst gäbe es $y \in [a,b] : |f(y)| > \|(f \circ g)\|_\infty$, also $|f(y)| > |f(g(x))| \quad \forall x \in X$.

Da g surj. ist, gibt es aber $x \in X$ mit $y = g(x)$, $\lightning$.

Aufgabe 4:

Nach der VL ist für $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$$ und

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \text{und} \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Somit ist $\cos(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (-x)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \cos(x)$,

für sin analog.

Damit folgt $e^{-ix} = \cos(-x) + i \sin(-x) = \cos(x) - i \sin(x)$, woraus die angegebenen Formeln für cos und sin folgen. Die Additionstheoreme folgen (wie bei cosh (sinh)) durch einfaches Ausmultiplizieren.

Die Nullstellen von sin sind $\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ und von cos: $\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Somit ist tan wohldefiniert.

Es ist

$$\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} =$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x - \frac{\sin x \sin y}{\cos y}} + \frac{\sin y}{\cos y - \frac{\sin x \sin y}{\cos x}} =$$

$$= \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{1 - \frac{\sin x}{\cos x} \frac{\sin y}{\cos y}} + \frac{\frac{\sin y}{\cos y}}{1 - \frac{\sin x}{\cos x} \frac{\sin y}{\cos y}}$$

$$= \frac{\tan x}{1 - \tan x \tan y} + \frac{\tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

□