Lösungsskizzen

Aufgabe 1:

(i) Es ist f auf ganz $\mathbb{R}$ definiert,

$$f(x) = a^x = e^{x \ln a}, \text{ also}$$

$$f'(x) = \ln a \cdot e^{x \ln a} = \ln a \cdot a^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

(ii) f ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert,

$$f'(x) = e^{\sin x} \cdot \cos x, \quad x \in \mathbb{R}$$

(iii) f ist auf $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ definiert,

$$f'(x) = -\frac{-2x}{(1-x^2)^2} = \frac{2x}{(1-x^2)^2}, \quad x \notin \{-1, 1\}$$

(iv) Da $\cos^2 \geq 0$, ist $\sqrt{1+\cos^2} \geq 1$ und $f(x)$ ist definiert für alle x, für die $\sqrt{1+\cos^2(x)} \neq 1$, also $\cos(x) \neq 0$ ist. Somit ist f auf $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ definiert.
Dort ist dann

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2(x)}} \cdot \left(\sqrt{1+\cos^2(x)}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2(x)}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2(x)}} \cdot \left(1+\cos^2(x)\right)'$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\cos^2(x)} \cdot (-2) \cos x \sin x = -\frac{\cos x \sin x}{1+\cos^2 x}$$

(v) Wie definiert sei f auf $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ definiert.
Dort ist dann

$$\tan'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

$$\text{oder} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

(vi) Da $\lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \sin(x) = 1$, $\lim_{x \searrow -\frac{\pi}{2}} \sin(x) = -1$ und (2)

$\lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \cos(x) = 0$, $\lim_{x \searrow -\frac{\pi}{2}} \cos(x) = 0$, so folgt

$\lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \tan(x) = +\infty$, $\lim_{x \searrow -\frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty$, also

ist (wegen Stetigkeit von tan): $\tan\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \mathbb{R}$,

also $\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ und für $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,

$y = \tan(x)$, also $x = \arctan(y)$:

$$\arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(x)} = \frac{1}{1+\tan^2(x)} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(y))}$$

$$= \frac{1}{1+y^2}.$$

Aufgabe 2: Um $x \neq 0$ ist

$f(x) = x^n$ mit $n = 2$ oder 3, also

f diffbar in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Sei $x_0 = 0$. Dann ist für $x < 0$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^3}{x} = x^2$$ und für $x > 0$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2}{x} = x \,,$$ also folgt

$$\lim_{x \to 0} \left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - 0 \right| \leq \lim_{x \to 0} \max\{x, x^2\} = 0 \,,$$

also ist f auch in 0 diffbar und

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \\ 3x^2 & \text{falls } x < 0 \end{cases} .$$

f' ist stetig.

Aufgabe 3:

Es ist $F'(x) = f'(x)e^{-\lambda x} - \lambda f(x)e^{-\lambda x}$

$$= \underbrace{(f'(x) - \lambda f(x))}_{=0} e^{-\lambda x} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

also ist F konstant auf $\mathbb{R}$, also

$$F(x) = F(0) = f(0)e^{-\lambda \cdot 0} = f(0) = c \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

also $c = F(x) = f(x)e^{-\lambda x}$, also

$$f(x) = ce^{\lambda x} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 4

Es gilt für $h \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}}{h} = \frac{1}{f(x+h)f(x)} \cdot \frac{f(x) - f(x+h)}{h}$$

$$= - \underbrace{\frac{1}{f(x+h)f(x)}}_{\xrightarrow[h \to 0]{} \frac{1}{f(x)^2}} \cdot \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{\xrightarrow[h \to 0]{} f'(x)} \xrightarrow[h \to 0]{} - \frac{f'(x)}{f(x)^2}.$$