Aufgabe 1:

(i) $$\lim_{x\to 1} \frac{1+\cos(\pi x)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{-\pi \sin(\pi x)}{2(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{-\pi^2 \cos(\pi x)}{2x} = \frac{\pi^2}{2}$$

(ii) $$(1+2x)^{\frac{1}{3x}} = e^{\frac{1}{3x}\cdot \ln(1+2x)} = e^{\frac{\ln(1+2x)}{3x}}$$

Es gilt $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(1+2x)}{3x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{1+2x}\cdot\frac{1}{3} = 0$,

und da exp stetig ist, gilt

$$\lim_{x\to\infty} (1+2x)^{1/3x} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln(1+2x)}{3x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+2x)}{3x}} = e^0 = \underline{\underline{1}}$$

(iii) L'Hospital nicht anwendbar sondern einfach

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{1+x}^{\to 1}}{\underbrace{x}_{\to 0}} = +\infty$$

(iv) $$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\underbrace{(e^x-1)+xe^x}_{e^x(1+x)-1}} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{e^x(1+x)+e^x} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

(v) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0$, denn:

$$0 \le |x\sin(1/x)| \le |x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

(L'Hospital nicht anwendbar)

Aufgabe 2:

Es ist $g(x) = x^x = e^{x \ln x}$

und $h(x) = x^{1/x} = e^{\frac{1}{x} \ln x}$

Nun gilt: $\lim\limits_{x \downarrow 0} x \ln x = \lim\limits_{x \downarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \downarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0,$

$\lim\limits_{x \to \infty} x \ln x = +\infty,$

$\lim\limits_{x \downarrow 0} \frac{1}{x} \ln x = \lim\limits_{x \downarrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} \ln x = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0,$

und da exp monoton und stetig ist folgt:

$\lim\limits_{x \downarrow 0} g(x) = \lim\limits_{x \downarrow 0} e^{x \ln x} = e^0 = 1,$

$\lim\limits_{x \downarrow 0} h(x) = \lim\limits_{x \downarrow 0} e^{\frac{1}{x} \ln x} = 0$

$\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \lim\limits_{x \to \infty} e^{x \ln x} = \infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} h(x) = \lim\limits_{x \to \infty} e^{\frac{1}{x} \ln x} = 1$

Also läßt sich g in 0 stetig fortsetzen
durch $g(0) := 1$,
h durch $h(0) := 0$.

Aufgabe 3:

Induktion über n:

I.A.: ($n=0$: $f^{(0)}(x) = f(x) = e^{-1/x} = p_0(\frac{1}{x})e^{-1/x}$

mit $p_0(t) = 1,\ t>0$).

$n=1$: $f^{(1)}(x) = f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = p_1(\frac{1}{x})e^{-1/x}$

mit $p_1(t) = t^2,\ t>0$.

I.V.: Es sei für $n \in \mathbb{N}$ bel.

$$f^{(n)}(x) = p_n(\tfrac{1}{x})e^{-1/x}, \text{ wobei}$$

$$p_n(t) = \sum_{k=0}^{N_n} a_k t^k, \quad t>0,\ a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}.$$

I.S.: ($n \to n+1$): Für $x>0$ ist dann

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = p_n(\tfrac{1}{x})\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} +$$

$$+ e^{-1/x} \cdot (p_n(\tfrac{1}{x}))'.$$

Es ist $(p_n(\frac{1}{x}))' = p_n'(\frac{1}{x}) \cdot (-\frac{1}{x^2}) = \sum_{k=1}^{N_n} k a_k (\frac{1}{x})^{k-1} \cdot (-\frac{1}{x^2})$,

also ist

$$f^{(n+1)}(x) = e^{-\frac{1}{x}}\left(\sum_{k=0}^{N_n} a_k (\tfrac{1}{x})^k \cdot \frac{1}{x^2} - \sum_{k=1}^{N_n} k a_k (\tfrac{1}{x})^{k-1} \cdot \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= e^{-\frac{1}{x}}\left(\sum_{k=0}^{N_n} a_k (\tfrac{1}{x})^{k+2} - \sum_{k=1}^{N_n} k a_k (\tfrac{1}{x})^{k+1}\right) = e^{-\frac{1}{x}} p_{n+1}(\tfrac{1}{x})$$

mit $p_{n+1}(t) = \sum_{k=0}^{N_n} a_k t^{k+2} - \sum_{k=1}^{N_n} k a_k t^{k+1}$.