Aufgabe 1:

(i) I.A.: $n=1$: $\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$ ✓

I.V.: Für bel. $n \in \mathbb{N}$ gelte $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

I.S. $(n \to n+1)$. z.z. ist: Dann gilt $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \underset{\text{I.V.}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= \frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

da $n(2n+1)+6(n+1) = (n+2)(2n+3)$. $\square$

(ii) Teste $n_0 = 1$: $2^1 \geq 1$ ✓
$n_0 = 2$: $2^2 = 4 \geq 2$ ✓

I.A.: $n = n_0 = 1$: $2^1 = 2 \geq 1$ ✓.

I.V.: Für bel. $n \in \mathbb{N}$ gelte: $2^n \geq n$.

I.S. $(n \to n+1)$: Zu zeigen ist: Dann gilt auch $2^{n+1} \geq n+1$:

$$2^{n+1} = 2\cdot 2^n \underset{\text{I.V.}}{\geq} 2\cdot n = n+n \geq n+1 \quad \blacksquare$$

<u>Aufgabe 7</u>: Aus der „normalen" Dreiecksungl. folgt

$$|a-b| = |a+(-b)| \le |a| + |-b| = |a| + |b|.$$

Setzen wir $a = x$, $b = x-y$, so erhalten wir

$$|y| \le |x| + |x-y|,$$ also

$$|y| - |x| \le |x-y|.$$

Setzen wir $a = y$, $b = y-x$, so erhalten wir

$$|x| \le |y| + |y-x| = |y| + |x-y|,$$ also

$$|x| - |y| \le |x-y|.$$

Insgesamt also: $||x|-|y|| \le |x-y|$. $\square$

Aufgabe 3:

(i) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ bel. Dann gilt

$$x \cdot y + x \cdot (-y) = x \cdot (\underbrace{y + (-y)}_{=0}) = x \cdot 0 = 0.$$

Da das inv. Element der Add. eind. ist, folgt $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$.

(ii) s.u.

(iii) Seien $x \leq y$ und $0 \leq z$. Dann ist $0 \leq y + (-x)$:

Aus $x \leq y$ folgt für bel. $w \in \mathbb{R}$: (2d)

$$x + w \leq y + w$$

Mit $w = -x$ folgt $0 = x + (-x) \leq y + (-x)$.

Mit (2e) folgt nun

$$0 \leq (y + (-x)) \cdot z \underset{\text{Ass. ges.}}{=} y \cdot z + (-x) \cdot z \underset{\text{s.o.}}{=} y \cdot z + (-(x \cdot z)).$$

Wieder mit (2d) folgt

$$x \cdot z = 0 + x \cdot z \leq y \cdot z + \underbrace{(-(x \cdot z)) + x \cdot z}_{=0} = y \cdot z + 0 = y \cdot z.$$

(iv) Sei $x \neq 0$.

(i) Wenn $0 < x$ ist, dann ist mit (2e) $0 < x \cdot x = x^2$.

(ii) Wenn $x < 0$ ist, dann ist wieder wegen 2d:

$$0 = -x + x < 0 + (-x) = (-x)$$, also mit (2e):

$$0 < (-x) \cdot (-x) = (-x)^2.$$

Nun ist (s.o.) $(-x)^2 = x^2$ ☒

(ii) Es ist folgt

$$(-x)\cdot(-y) + (-(x\cdot y)) \overset{(i)}{=} (-x)\cdot(-y) + x\cdot(-y) =$$

$$= ((-x)+x)\cdot(-y) = 0\cdot(-y) = 0,$$

Also ist wegen der Eind. des additiven Inversen

$$(-x)\cdot(-y) = -(-(x\cdot y)).$$

Aber für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $-(-x) = x$:

$$(-x) + x = 0,$$ also ist $x = -(-x)$.

Aufgabe 4:

Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist $\frac{1}{x^2} \geq 0$.

0 ist also eine untere Schranke.

Angenommen, es gebe eine größere untere Schranke $\varepsilon > 0$, d.h.

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist $\frac{1}{x^2} \geq \varepsilon$, also $1 \geq \varepsilon \cdot x^2$

Nach dem archimedischen Prinzip gibt es aber $n \in \mathbb{N}$ mit $1 < \varepsilon \cdot n$. Dies ist ein Widerspruch $\lightning$.

Es gibt keine obere Schranke:

Ang. $\exists K > 0 : \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \frac{1}{x^2} \leq K$, also $1 \leq K \cdot x^2$.

Wählen wir $x = \frac{1}{2K}$, so folgt: $1 \leq K \cdot \frac{1}{4K^2} = \frac{1}{4K}$,

also $4K \leq 1$ oder $K \leq 1/4$.

Es ist aber z.B. für $x = 1$ $\frac{1}{1^2} = 1 > 1/4$ $\lightning$. $\blacksquare$