Aufgabe 1:

(i) $z_1 = \frac{2+3i}{-1+2i} = \frac{(2+3i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)} = \frac{-2-3i-4i+6}{1+4} = \frac{4-7i}{5}$

$= \frac{4}{5} - \frac{7}{5}i.$

$\mathrm{Re}(z_1) = \frac{4}{5}, \quad \mathrm{Im}(z_1) = -\frac{7}{5}.$

(ii) $z_2 = 3e^{-i\pi} = 3(\underbrace{\cos(-\pi)}_{-1} + i\underbrace{\sin(-\pi)}_{0})$

$= -3$

$\mathrm{Re}(z_2) = -3, \quad \mathrm{Im}(z_2) = 0.$

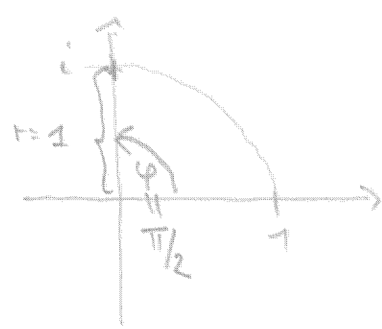
(iii) $z_3 = i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$

$\mathrm{Re}(z_3) = 0, \quad \mathrm{Im}(z_3) = 1$

In Polarkoordinaten.

$r = |z_3| = |i| = 1.$

Aus der Zeichnung: $\varphi = \pi/2$



<u>Aufgabe 2</u>:

d ist eine Metrik:

(a) d ist auf $X \times X$ definiert und hat als Werte nur 0 und 1, bildet also insbesondere nach $\mathbb{R}_0^+$ ab. Somit ist d wohldefiniert.

(b) <u>Definitheit</u>: Sei $x=y$. Dann ist per Definition

$$d(x,y)=0.$$

Sei $d(x,y)=0$. Per Definition ist dies nur der Fall, wenn $x=y$ ist.

(c) Symmetrie:

$$d(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ 1 & x\neq y\end{cases} = \begin{cases}0 & y=x\\ 1 & y\neq x\end{cases} = d(y,x).$$

(d) Δ-Ungl.: Seien $x,y,z \in X$ bel. Dann folgt:

<u>Fall 1: $x=z$</u>: Dann ist

$$d(x,z)=0 \leq \underbrace{d(x,y)}_{\geq 0}+\underbrace{d(y,z)}_{\geq 0}.$$

<u>Fall 2: $x \neq z$</u>: Dann ist

$$d(x,z)=1.$$

Nun ist weiterhin zu unterscheiden:

<u>$y=x$</u>: Dann ist $y\neq z$ und es gilt:

$$\underbrace{d(x,z)}_{=1} \leq \underbrace{d(x,y)}_{=0}+\underbrace{d(y,z)}_{=1}.$$

<u>$y=z$</u>: Ganz analog: Es ist dann $y \neq x$ und

$$\underbrace{d(x,z)}_{=1} \leq \underbrace{d(x,y)}_{=1}+\underbrace{d(y,z)}_{=0}$$

$y\neq x$ und $y \neq z$: Dann ist

$$\underbrace{d(x,z)}_{=1} \leq \underbrace{d(x,y)}_{=1}+\underbrace{d(y,z)}_{=1}$$

Alle Teilmengen von X sind bzgl. d offen:

Sei $A \subset X$ beliebig und sei $x \in A$ beliebig.
Es ist zu zeigen, daß es $r > 0$ gibt mit $B(x,r) \subset A$.
Wir wählen $r = 1/2$.

Dann ist $B(x, 1/2) = \{ y \in X \mid d(x,y) < 1/2 \} = \{x\} \subset A$.

Da also alle Teilmengen von X offen sind, so sind auch alle Teilmengen von X abgeschlossen:

Sei $B \subset X$. Dann ist $C_X(B) = X \setminus B \subset X$ offen, also B abgeschlossen.

$\Box$

Aufgabe 3:

<u>$(0,1)$</u>: Sei $x \in (0,1)$ beliebig.

Dann ist $r_1 := |x-0| = x > 0$ und

$r_2 := |1-x| = 1-x > 0$

Wir setzen $r := \min\{r_1, r_2\}$.

Es ist $r > 0$ und $B(x,r) \subset (0,1)$:

Sei $y \in B(x,r)$, also $|y-x| < r$.

Wir müssen zeigen: $y \in (0,1)$, also $0 < y < 1$:

- Es ist $y > 0$: Wäre $y < 0$, so ist wegen $x > 0$:

$$|x-y| = x \underbrace{-y}_{\geq 0} \geq x > r \quad ↯.$$

- Es ist $1 < y$: Wäre $y > 1$, so folgt

$$|\underbrace{y}_{>1} - \underbrace{x}_{<1}| = y - x > 1 - x > r \quad ↯. \qquad \square$$

<u>$\{1\}$</u>: Zu zeigen ist: $(0,2) \setminus \{1\} = (0,1) \cup (1,2)$ ist offen. Wir haben bereits gesehen, daß $(0,1)$ offen ist.

Der Beweis, daß $(1,2)$ offen ist, funktioniert ganz ähnlich.

Da die Vereinigung offener Mengen offen ist, so ist $(0,2) \setminus \{1\}$ offen, was zu zeigen war.

Aufgabe 4: Seien $z, w \in \mathbb{C}$ beliebig.

$z = a + ib$

$w = c + id$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

(i) Es ist $\bar{z} = a - ib$, $\bar{w} = c - id$

$z \cdot w = (a+ib)(c+id) = ac - bd + i(ad+bc)$, also

$\overline{zw} = ac - bd - i(ad+bc)$ und

$\bar{z} \cdot \bar{w} = (a-ib)(c-id) = ac - bd - i(ad+bc)$, also

$$\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}.$$

Wegen $|z|^2 = z\bar{z}$, $|w|^2 = w \cdot \bar{w}$,

$|zw|^2 = \overline{zw} \cdot zw = \bar{z} \cdot \bar{w} \cdot z \cdot w = \bar{z} \cdot z \cdot \bar{w} \cdot w = |z|^2 |w|^2$

folgt (wegen $|\cdot| \geq 0$): $|zw| = |z||w|$.

(ii) Es ist $z + w = a + c + i(b+d)$, also

$\overline{z+w} = a + c - i(b+d) = a - ib + c - id$

$= \bar{z} + \bar{w}$. $\square$