Lösungsskizzen

Aufgabe 1.

(i) Die Folge $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_n$ konvergiert gegen Null:
Sei $\varepsilon > 0$ bel. Wir suchen $N > 0 : \forall n \geq N$:

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon .$$

Wir wählen $N > \frac{1}{\varepsilon^2}$, also $\frac{1}{N} < \varepsilon^2$ und damit $\frac{1}{\sqrt{N}} < \varepsilon$.

Dann folgt für alle $n \geq N$:

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{N}} < \varepsilon .$$

(ii) Die Folge $\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)_n$ konvergiert gegen Eins.
Dies sieht man z.B. so:

$$\frac{n^2}{n^2+1} = \frac{\cancel{n^2}}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{1+\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 .$$

Wir wollen dies mit der Definition beweisen:
Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\left|\frac{n^2}{n^2+1} - 1\right| = \left|\frac{n^2-n^2-1}{n^2+1}\right| = \frac{1}{n^2+1}$.

Sei $\varepsilon > 0$ bel. Wir können annehmen, daß $\varepsilon < 1$ ist (Warum?) und wählen $N > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}$. Dann folgt für $n \geq N$:

$$\left|\frac{n^2}{n^2+1} - 1\right| = \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{N^2+1} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}-1+1} = \varepsilon .$$

(iii) Die Folge divergiert. Dies sieht man <u>zum Beispiel</u> so:

Für gerades $n \in \mathbb{N}$, also $n = 2\ell$, $\ell \in \mathbb{N}$, ist

$$x_{2\ell} = (2\ell)^2 + \frac{1}{(2\ell)^2} > (2\ell)^2 = 4\ell^2.$$

Damit ist die Teilfolge $(x_{2\ell})$ unbeschränkt und somit nicht konvergent.
Also konvergiert auch (x_n) nicht.

Aufgabe 2:

(i) Diese Aussage ist falsch:

Gegenbsp.: Wir betrachten $X = \mathbb{R}$ mit der üblichen Metrik und

$x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$.

Dann ist $x_{2l} = 1 \; \forall l \in \mathbb{N}$, also liegen die unendlich vielen Folgenglieder $x_{2l}, l \in \mathbb{N}$ alle in jeder Kugel

$B(1, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ bel..

Aber $(-1)^n$ ist nicht konvergent.

(ii) Das ist richtig: Da für $n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$

$d(x_n, x) < \varepsilon \iff x_n \in B(x, \varepsilon)$ per Def.,

so gilt:

„$\Rightarrow$" Sei $x_n \to x$, also: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N: d(x_n, x) < \varepsilon$.

Sei $\varepsilon > 0$ bel. Dann gibt es also $N \in \mathbb{N}$:

$\forall n > N: x_n \in B(x, \varepsilon)$, also

liegen höchstens die endl. vielen Folgenglieder $x_1, \dots, x_N$ nicht in $B(x, \varepsilon)$.

„$\Leftarrow$" Wir nehmen also an, daß für jedes $\varepsilon > 0$ alle bis auf endlich viele Folgenglieder in $B(x, \varepsilon)$ liegen und wollen $x_n \to x$ zeigen.

Angenommen, $x_n \not\to x$, d.h. $\exists \varepsilon > 0: \forall N \in \mathbb{N}$ $\exists n_N \geq N$ mit $d(x_{n_N}, x) \geq \varepsilon$, also $x_{n_N} \notin B(x, \varepsilon)$.

Damit liegen aber die unendlich vielen Folgenglieder $\{x_{n_1}, \dots, x_{n_N}, \dots\}$ nicht in $B(x, \varepsilon)$. Widerspruch.

(iii) Die Aussage ist nicht wahr:

Die Aussage „Es gibt eine ε-Kugel, in der alle Folgenglieder liegen" ist genau die Beschränktheit der Folge. Aber nicht jede beschr. Folge konv.:

Gegenbsp.:

$$x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}.$$

(x_n) konvergiert nicht (in $\mathbb{R}$ bzgl. $|\cdot|$), aber alle Folgenglieder liegen z.B. in $B(0,2)$.

Aufgabe 3:

(i) Angenommen $(\frac{1}{n})$ würde bzgl. der trivialen Metrik konvergieren, d.h. $\exists x \in \mathbb{R}$:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \ d(x, \frac{1}{n}) < \varepsilon$.

Sei also x entsprechend. Wir wählen $\varepsilon = 1/2$.

Dann gibt es $N = N(1/2)$:

$$d(x, 1/n) < 1/2 \quad \forall n \geq N.$$

Aufgrund der Def. von d folgt ~~muß~~ dann aber $d(x, 1/n) = 0$, also $x = 1/n$ für alle $n \geq N$ gelten. Widerspruch.

(ii) Sei (x_n) eine Folge, die ab einem bestimmten Index konstant ist, d.h. $\exists c \in \mathbb{R} \ \exists N \in \mathbb{N}$:

$$x_n = c \quad \forall n \geq N.$$

Dann konvergiert (x_n) gegen c: Sei $\varepsilon > 0$ bel. Für $n \geq N$ gilt dann

$$d(x_n, c) = d(c, c) = 0 < \varepsilon.$$

Sei nun (x_n) eine konvergente Folge, d.h. $\exists x \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N$:

$$d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Sei x dieser Grenzwert. Wir wählen $\varepsilon = 1/2$. Dann gibt es $N = N(1/2)$:

$$d(x_n, x) < 1/2 \quad \forall n \geq N.$$

Wie oben schließen wir auf

$$d(x_n, x) = 0, \text{ also } x_n = x \quad \forall n \geq N.$$

Also ist (x_n) ab dem Index N konstant.

Aufgabe 4:

- Es ist für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{a^n}{n!} \geq 0.$$ Also ist

(x_n) nach unten beschränkt.

- Es ist $$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1} < 1 \text{ für } n+1 > a.$$

Also ist (x_n) monoton fallend (ab einem bestimmten Index $> a$), also konvergent.

Man kann dann auch zeigen, daß

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$ ist:

Da $\left(\frac{a^n}{n!}\right) \to c$ konvergiert, so ist

$$c = \lim_{n \to \infty} \frac{a^n}{n!} = \lim_{n \to \infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = \lim_{n \to \infty} \underbrace{\frac{a}{(n+1)}}_{=: y_n} \cdot \underbrace{\frac{a^n}{n!}}_{x_n}$$

Da $\lim_{n \to \infty} x_n = c$ und $\lim_{n \to \infty} y_n = \lim_{n \to \infty} \frac{a}{n+1} = 0$,

so folgt

$$c = \lim x_n \cdot y_n = \lim x_n \cdot \lim y_n = c \cdot 0 = 0.$$