# Aufgabe 1:

(i) $(x_n)$ hat die Häufungspunkte $0$ und $2$, da die Teilfolge $x_{2n} = 2$, $n \in \mathbb{N}$, gegen $2$ und die Teilfolge $x_{2n-1} = 0$, $n \in \mathbb{N}$, gegen $0$ konvergiert.

Da sich die Folge in diese beiden TF zerlegen läßt, kann es keine weiteren HP geben (warum nicht?!)

Somit ist $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = 2$

$\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

(ii) Da für $n \in \mathbb{N}$,

$$|x_n - 2| = \left|\frac{1}{1+3/n^2} - 1\right| = \left|\frac{n^2}{n^2+3} - 1\right| = \frac{3}{n^2+3} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

so konvergiert $(x_n)$ gegen $2$,

also ist $2$ einziger HP und somit

$\liminf = \limsup = 2$.

## Aufgabe 2:

(i) Seien $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ bel.
Wir wählen $\delta := \frac{\varepsilon}{5}$.
Dann folgt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$:

$$|f(x) - f(x_0)| = |5x - 3 - 5x_0 + 3| =$$

$$= 5\,|x - x_0| < 5\delta = \varepsilon.$$

Also ist $f$ stetig auf $\mathbb{R}$.

(ii) $f$ ist nirgendwo stetig. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ bel. Wir wählen $\varepsilon = \frac{1}{2}$.
Sei nun $\delta > 0$ bel.

Fall 1: $x_0 \in \mathbb{Q}$.
Dann gibt es $\hat{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, so daß $|x_0 - \hat{x}| < \delta$.
~~Der~~ Es ist dann aber

$$|f(\hat{x}) - f(x_0)| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Fall 2: $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
Dann gibt es $\hat{x} \in \mathbb{Q}$, so daß $|x_0 - \hat{x}| < \delta$.
Auch hier ist dann

$$|f(\hat{x}) - f(x_0)| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon$$

# Aufgabe 3:

(i) $A = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

- $\mathring{A} = \emptyset$: Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ bel.
  Dann gibt es $x \in B(\frac{1}{n}, \varepsilon)$ mit $x \notin A$:
  Sei z.B. $\alpha < \varepsilon$ mit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
  Dann ist $x := \frac{1}{n} + \alpha \notin \mathbb{Q}$, also $x \notin A$, aber
  $|x - \frac{1}{n}| = \alpha < \varepsilon$, also $x \in B(\frac{1}{n}, \varepsilon)$.

- $\overline{A} = A \cup \{0\}$:
  - $0$ ist HP von $A$: Sei $\varepsilon > 0$ bel.
    Dann gibt es wegen $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ein $N > 0$:
    $\forall n \geq N: \frac{1}{n} < \varepsilon$,
    also ist z.B. $x_{N+1} \in B(0, \varepsilon)$ und $0 \neq x_{N+1}$.
    Es folgt $\overline{A} \supset A \cup \{0\}$.
  - Es gibt keine weiteren HP: Sei $x \in \mathbb{R} \setminus (A \cup \{0\})$.
    1. Fall: Falls $x < 0$, dann ist z.B.
    $$B(x, \tfrac{|x|}{2}) \cap A = \emptyset$$
    2. Fall: Falls $x > 1$, dann ist z.B.
    $$B(x, \tfrac{x-1}{2}) \cap A = \emptyset,$$
    3. Fall, Falls $0 < x < 1$ $(x \neq 0, x \notin A)$, dann gibt es $n \in \mathbb{N}$:
    $$\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n}.$$
    Dann ist z.B. $B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$ für
    $$\varepsilon = \min\left\{\tfrac{1}{2}\left(x - \tfrac{1}{n+1}\right), \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{n} - x\right)\right\}.$$

- $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A} = A \cup \{0\}$.

Aufgabe 3(ii): $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$.

$\mathring{A} = A$ : Sei $(x_0, y_0) \in \cancel{A}\, A$ bel., also $x_0 > 0$.

Wir setzen $\varepsilon = \frac{x_0}{2}$. Dann ist

$B((x_0,y_0), \varepsilon) \subset A$:

Sei $(x,y) \in B((x_0,y_0),\varepsilon)$, also

$\varepsilon > |(x,y) - (x_0,y_0)| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ und

insb. $|x - x_0| < \varepsilon = \frac{x_0}{2}$.

Dann ist $x > 0$: Ang. $x \leq 0$, dann

wäre $|x_0 - x| = x_0 - x > x_0 > \frac{x_0}{2}$ ↯.

$\bar{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\} = A \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$.

„$\supset$": Sei $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $x_0 = 0$.

Dann ist $(x_0,y_0)$ HP von $A$:

Sei $\varepsilon > 0$ bel. ~~und~~ Dann ist $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, also

$(\frac{\varepsilon}{2}, y_0) \in A$ und

$|(x_0,y_0) - (\frac{\varepsilon}{2}, y_0)| = |\underset{=0}{x_0} - \frac{\varepsilon}{2}| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, also

$(\frac{\varepsilon}{2}, y_0) \in B((x_0,y_0),\varepsilon)$.

„$\subset$" Ang. es gibt $(x_0,y_0) \in \bar{A}$ mit $x_0 < 0$.

Dann ist $(x_0,y_0) \notin A$ und $(x_0,y_0)$ ist kein

HP von $A$: z.B. ist

$B((x_0,y_0), \frac{|x_0|}{2}) \cap A = \emptyset$, da für

$(x,y) \in B((x_0,y_0), \frac{|x_0|}{2})$, also $|(x,y) - (x_0,y_0)| < \frac{|x_0|}{2} = -\frac{x_0}{2}$

folgt: $x < 0$:

Ang. $x \geq 0$. Dann wäre $-\frac{x_0}{2} \geq |x - x_0| = x - x_0 > -x_0$,

also $-\frac{x_0}{2} < 0$ ↯.

$$\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

# Aufgabe 4:

(i) Angenommen $\bar{A}$ sei nicht abg., also ang. $X \setminus \bar{A}$ sei nicht offen. Dann gibt es also $x_0 \in X \setminus \bar{A}$ : $\forall \varepsilon > 0$ : $B(x_0, \varepsilon) \not\subset X \setminus \bar{A}$, also $B(x_0, \varepsilon) \cap \bar{A} \neq \emptyset$.
~~Da~~ Also ist $x_0$ ein Berührpkt. von $\bar{A}$ und somit $x_0 \in \bar{A}$ ↯.

(ii) „⇒" Sei $\bar{A} = A$. Dann ist nach (i) $\bar{A}$ und somit $A$ abg.

„⇐" Sei $A$ abg. Aus der VL wissen wir: $\bar{A}$ ist die kleinste abg. Menge, die $A$ enthält, da aber $A$ abg. ist (und natürlich $A$ enthält), so folgt

$$\bar{A} = \bigcap_{\substack{A \subset B \\ B \text{ abg.}}} B = A.$$

(iii) Sei $B \subset A$ und sei $x_0 \in B$. Dann ist $x_0$ Berührpkt. von $B$, also: $\forall \varepsilon > 0 : B(x_0, \varepsilon) \cap B \neq \emptyset$.
Da $B \subset A$ folgt dann auch:

$$\forall \varepsilon > 0 : B(x_0, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$, also

ist $x_0$ Berührpunkt von $A$ und damit $x_0 \in \bar{A}$.