Lösungsskizzen

Aufgabe 1:

(i) Viele mögliche Beweise.

z.B. so: Sei $U'' \subset X''$ (bzgl. d'') offen.

Da g stetig ist, so ist

$$U' := g^{-1}(U'') \subset X' \text{ offen (bzgl. } d')$$

Da f stetig ist, so ist

$$U := f^{-1}(U') \subset X \text{ offen (bzgl. } d).$$

Also ist $(g\circ f)^{-1}(U'') = f^{-1}(g^{-1}(U'')) = f^{-1}(U') = U$ offen. Damit ist $g\circ f$ stetig.

oder so: Sei $x \in X$ bel. und $(x_n) \subset X$ mit $x_n \to x$. Da f stetig ist, so konv.

$$x_n' := f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} x' := f(x).$$

Da g stetig ist, konv.

$$g(x_n') \xrightarrow[n\to\infty]{} g(x').$$

Also konv.

$$(g\circ f)(x_n) = g(f(x_n)) = g(x_n') \to g(x') = (g\circ f)(x).$$

(ii) Die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ ist stetig.

Da das Produkt stetiger Funktionen stetig ist, folgt induktiv, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$x \mapsto x^n \text{ stetig ist.}$$

Da skalare Vielfache stetiger Fkt. stetig sind, so ist für bel. $\alpha_n \in \mathbb{R}$ auch $x \mapsto \alpha_n x^n$ stetig.

Da die Summe stetiger Fkt. stetig ist, folgt induktiv, daß

$$x \mapsto p(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k \text{ stetig ist.}$$

(iii) Es sei $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, wobei p, q Polynome sind. Ist $N = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) = 0\}$ die Menge der Nullstellen von q, so ist

$$r : \mathbb{R} \setminus N \to \mathbb{R}$$ wohldefiniert und stetig, da für $x \in \mathbb{R} \setminus N$ $q(x) \neq 0$ und der Quotient stetiger Fkt. dann stetig ist.

(iv) Es sei $x \in \mathbb{R}$ und $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ eine Folge rationaler Zahlen mit $x_n \to x$ in $\mathbb{R}$. Eine solche gibt es wegen der Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ immer. Da f und g stetig sind, folgt

$$f(x) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(\lim_{n\to\infty} x_n) = g(x).$$

(v) Ja: Sei $x_0 \in \mathbb{Q}$ bel. und $\varepsilon > 0$ bel.

Wir wählen $\delta := \frac{1}{2}|x_0 - \sqrt{2}|$.

Da $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, so ist $|x_0 - \sqrt{2}| > 0$ und damit $\delta > 0$.

Sei nun $x \in \mathbb{Q}$ bel. mit $|x_0 - x| < \delta$.

Fall 1: Ist $x_0 > \sqrt{2}$, so ist auch $x > \sqrt{2}$:

Ann. $x \leq \sqrt{2}$. Dann wäre

$$|x_0 - x| = x_0 - x = \underbrace{x_0 - \sqrt{2}}_{\geq 0} + \underbrace{\sqrt{2} - x}_{\geq 0}$$

$$\geq |x_0 - \sqrt{2}| > \delta \quad ⚡.$$

Also folgt

$$|f(x) - f(x_0)| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon.$$

Fall 2: $x_0 < \sqrt{2}$ analog.

Aufgabe 2:

Es ist für $x \in \mathbb{R}$:

$$\left(\frac{1}{x+3} - \frac{2}{3x+5}\right) \cdot \frac{1}{x-1} = \frac{3x+5-2x-6}{(x+3)(3x+5)} \cdot \frac{1}{x-1} = \frac{x-1}{(x+3)(3x+5)} \cdot \frac{1}{x-1}$$
$$= \frac{1}{(x+3)(3x+5)}.$$

Nun ist, da $x \mapsto x+3$ und $x \mapsto 3x+5$ stetig sind und damit auch $x \mapsto (x+3)(3x+5)$ stetig ist:

$$\lim_{x \to 1} (x+3)(3x+5) = (1+3)(3+5) = 32 \neq 0, \text{ also}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x+3)(3x+5)} = \frac{1}{32}.$$

<u>Aufgabe 3</u>:

Wir betrachten die offene Überdeckung

$$O_n := \left(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n}\right), \ n \in \mathbb{N}.$$

Da für jedes $1 > x > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\frac{1}{n+2} < x < \frac{1}{n}, \text{ so gilt}$$

$$(0,1) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_n .$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist O_n offen.
Es gibt aber keine endl. Teilüberdeckung.
Angenommen $O_{n_1}, \dots, O_{n_N}$ wären eine endl. Teilüberdeckung, d.h.

$$(0,1) \subset \bigcup_{k=1}^{N} O_{n_k} = \bigcup_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{n_k+2}, \frac{1}{n_k}\right).$$

Dann ist $\hat{n} := \max\{n_k \mid k = 1, \dots, N\} < \infty$, also $\frac{1}{\hat{n}} > 0$. Für $0 < x < \frac{1}{\hat{n}}$ gibt es folglich kein $k \in \{1, \dots, N\}$ mit $x \in O_{n_k}$ ↯.

<u>Aufgabe 4</u>: Sei also $f(x_0) > 0$.

Aus der Stetigkeit von f folgt, daß es für $\varepsilon = f(x_0)$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$, also für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ gilt:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon .$$

Hieraus folgt aber $f(x) > 0 \;\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Wäre nämlich für ein solches $x \in (a, b)$ mit $|x_0 - x| < \delta$ $f(x) \leq 0$, so würde folgen:

$$|f(x_0) - f(x)| = f(x_0) \underbrace{- f(x)}_{\geq 0} \geq f(x_0) = \varepsilon \quad \lightning .$$

Der allgemeine Beweis ist wörtlich derselbe, wenn $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ durch $B(x_0, \delta)$ und $|x_0 - x|$ durch $d(x_0, x)$ ersetzt wird.