Lösungsskizzen

Aufgabe 1:

• Sei $f: X \to X'$ L-stetig, d.h. $\exists L \geq 0$:

$$d'(f(x), f(y)) \leq L\, d(x,y) \quad \forall x,y \in X.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ bel. Wir setzen $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$.
Dann ist für bel. $x,y \in X$ mit $d(x,y) < \delta$:

$$d'(f(x), f(y)) \leq L\, d(x,y) < L \cdot \delta = L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon,$$

und δ hängt nur von ε ab!
Also ist f glm. stetig.

• Sei $f: X \to X'$ glm. stetig, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall x,y \in X: d(x,y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Sei nun $x_0 \in X$ bel., $\varepsilon > 0$ bel. und δ entsprechend der glm. Stetigkeit gewählt. Dann gilt <u>insbesondere</u> für alle $x \in X$ mit $d(x, x_0) < \delta$:

$$d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon;$$

also ist f in x_0 und folglich überall stetig.

• Die Umkehrungen gelten nicht:
- In der VL: $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist stetig, aber nicht glm. stetig.
- Aufg. 2(iv): $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ ist glm. stetig, aber nicht L-stetig.

Aufgabe 2

(i) g ist glm. stetig: Sei $\varepsilon > 0$ bel.
Wir setzen $\delta := \frac{\varepsilon}{42^2}$.
Seien nun $x, y \in [1/42, 1]$ bel. mit
$|x-y| < \delta$.
Dann folgt
$$|g(x) - g(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|y-x|}{|xy|} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } x,y \geq \frac{1}{42}}}{\leq} \frac{|y-x|}{\frac{1}{42} \cdot \frac{1}{42}} < 42^2 \cdot \delta = \varepsilon.$$

(ii) Ja: Die Komponenten von f sind als Komposition stetiger Fkt. stetig, also auch f selbst.
Weiterhin ist die Menge $[-2,3] \times [1,4]$ abg. und beschränkt (Warum?), also kompakt ($\mathbb{R}^2$!!!) und somit ist f glm. stetig.

(iii) Sei $\varepsilon > 0$ bel. Wir wählen $\delta = 1/2$. Seien nun $n, m \in \mathbb{N}$ mit $|n-m| < \delta$, also $|n-m| < 1/2$, also $n = m$ und somit folgt
$|f(n) - f(m)| = 0 < \varepsilon$.
Nach Konstruktion ist δ insbesondere unabhängig von ~~x_0~~ gewählt, also ist f auch glm. stetig.

(iv) <u>~~f~~ f ist glm. stetig</u>: Sei $\varepsilon > 0$ bel.
Wir setzen $\delta := \varepsilon^2$ (unabh. von x, y!)
Seien $x, y \in [0,1)$ bel. mit $|x-y| < \delta$.
oBdA sei $x \leq y$, also auch $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$.
Dann folgt

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \sqrt{y} - \sqrt{x} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Hinweis}}}{\leq} \sqrt{y-x} = \sqrt{|y-x|}$$

$$< \sqrt{\delta} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon.$$

<u>f ist nicht L-stetig</u>: Ang. doch, d.h.
$\exists L > 0: \ |f(x) - f(y)| \leq L\,|x-y| \quad \forall x, y \in [0,1)$.
Dann folgt:

$$\frac{|\sqrt{x} - \sqrt{y}|}{|x-y|} \leq L \quad \forall x, y \in [0,1),\ x \neq y.$$

Für $y = 0$ folgt insb.

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x} \leq L \quad \forall x > 0,$$

Widerspruch, da $\frac{1}{\sqrt{x}} \underset{\substack{x \to 0 \\ x > 0}}{\longrightarrow} \infty$.

Aufgabe 3:

(i) Nein, da $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ nicht abgeschlossen ist: Sei $x_0 \in [0,1]$, $x_0 \notin \mathbb{Q}$.
Dann gibt es $\forall \varepsilon > 0$ $q_\varepsilon \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ mit
$$|x_0 - q_\varepsilon| < \varepsilon$$
, da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist.
Also ist x_0 Häufungspunkt von $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ (war auch in der Übung dran).
Also ist $x_0 \in \overline{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$, aber $x_0 \notin \mathbb{Q} \cap [0,1]$.
Also ist $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ nicht abg.

(ii) z.B. so: Da für alle $n \in \mathbb{N}$ A_n kompakt, also insb. abg. und beschr. ist, so ist auch
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset A_1$$
beschränkt und als bel. Schnitt abg. Mengen auch abgeschlossen.
und somit ($\mathbb{R}^n$) kompakt.

Die Aussage gilt auch allgemein:
Da $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ eine abg. Teilmenge der kompakten Menge A_1 ist, so ist sie selber kompakt (6. Übungsblatt).