Lösungsskizzen

Aufgabe 1 (i) Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf X und
$d(x,y) := \|x-y\|$ für $x,y \in X$.

(1) Da $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_0^+$, so folgt
$d : X \times X \to \mathbb{R}_0^+$ nach Definition

(2) Seien $x,y \in X$ mit $d(x,y) = 0$, also
$\|x-y\| = 0$. Da $\|\cdot\|$ eine Norm ist, folgt $x - y = 0$, also $x = y$.
Sei nun $x \in X$. Dann ist
$d(x,x) = \|x-x\| = \|0\| = 0$.

(3) Seien $x,y \in X$ bel. Dann folgt
$d(x,y) = \|x-y\| = \|(-1)(y-x)\| = |(-1)|\,\|y-x\|$
$= d(y,x)$.

(4) Seien $x,y,z \in X$ bel. Dann folgt
$d(x,y) = \|x-y\| = \|x-z+z-y\|$
$\leq \|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z) + d(z,y)$.

Aufgabe 1(ii): Angenommen, es gäbe eine Norm $\|\cdot\|$, so daß

$$d(x,y) = \|x-y\|.$$

Dann folgt insb. für $x = 3y$, $y \neq 0$:

$$1 = \underbrace{d(3y,y)}_{=1} = \|3y-y\| = \|2y\| = 2\|y-0\| = 2\underbrace{d(y,0)}_{=1} = 2$$

$\lightning$.

Aufgabe 2:

(i) „$\Rightarrow$" Sei $(x_n) \subset X$, $x \in X$ und $\|x_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Da für bel. $z \in X$:

$$|||z||| \leq C\|z\|,$$ folgt:

$$|||x_n - x||| \leq C\|x_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

„$\Leftarrow$" analog.

(ii) „$\Rightarrow$" Sei $f: X \to Y$ bzgl. $\|\cdot\|$ stetig.

Sei nun $x \in X$, $(x_n) \subset X$ bel. mit $|||x_n - x||| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

z.z.: $\|f(x_n) - f(x)\|_Y \to 0$.

Da $\|x_n - x\| \leq \frac{1}{c}|||x_n - x||| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, so konv. (x_n) auch bzgl. $\|\cdot\|$ gegen x, und da f bzgl. $\|\cdot\|$ stetig ist, folgt $\|f(x_n) - f(x)\|_Y \to 0$.

„$\Leftarrow$" analog

$\square$

Bemerkungen (1) Probiert bei (ii) auch andere Beweise.

(2) Man beweise (so es noch nicht klar ist): $(x_n) \subset X$ konv. genau dann gegen $x \in X$ bzgl. $\|\cdot\|$, falls $\|x_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Aufgabe 3: Sei $f : [a,b] \to [a,b]$ stetig.

Wir definieren die Hilfsfunktion

$$g : [a,b] \to \mathbb{R},$$

$$g(x) := f(x) - x.$$

Dann ist auch g stetig und es gilt

$$g(a) = f(a) - a \geq 0$$, da f nach $[a,b]$ abbildet

und

$$g(b) = f(b) - b \leq 0.$$

Also gibt es nach dem ZWS ein $x_0 \in [a,b]$ mit $g(x_0) = 0$, also

$$f(x_0) = x_0 \qquad \square$$

Aufgabe (4)

(i) Die Folge $a_n = \frac{n+(-1)^{2n-1}}{3n+1} = \frac{n-1}{3n+1}$

ist keine Nullfolge, also kann

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nicht konvergieren.

In der Tat ist

$a_n = \frac{n-1}{3n+1} = \frac{1-\frac{1}{n}}{3+1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{3} \neq 0.$

(ii) Quotientenkriterium: Mit $a_n = \frac{n^4}{3^n}$ folgt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^4}{3^{n+1}}}{\frac{n^4}{3^n}} = \frac{(n+1)^4}{n^4} \cdot \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^4.$$

Da $\frac{n+1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, gibt es z.B. $n_0 \in \mathbb{N}$:

$\frac{n+1}{n} \le \sqrt[4]{2} \quad \forall n \ge n_0$, also

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \underline{\underline{\frac{2}{3}}} < 1 \quad \forall n \ge n_0$, also konv. die Reihe.

(iii) Minorantenkriterium: Für $n \ge 3$ ist $n^2-3n+1 \ge 0$,

also

$$a_n = \frac{n+4}{n^2-3n+1} \ge \frac{n}{n^2-3n+1} \ge \frac{n}{n^2-3n+n} = \frac{1}{n-2} \ge \frac{1}{n} =: b_n$$

und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert (harm. Reihe),

also divergiert die Reihe.

(iv) Majorantenkriterium: Es ist $a_n = \frac{2+(-1)^n}{2^{n-1}} \le \frac{2+1}{2^{n-1}} = 6 \cdot \frac{1}{2^n} =: b_n$

und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} 6 \cdot \frac{1}{2^n} = 6 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 6 \, \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 12$ (geom. Reihe),

also konvergiert $\sum b_n$ und damit auch $\sum a_n$.