Tutorien am 17. / 18. 6.

Aufgabe 1:
Zeige $e^0 = 1$ und daß für alle $x \in \mathbb{R}$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad \text{und} \quad e^x > 0$$

gilt.

Lösung:

$$e^0 := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 0^0 = 1$$

Und damit $1 = e^0 = e^x \cdot e^{-x}$, also $e^{-x} = 1/e^x$.
Für $x > 0$ ist $e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > 0$ klar. Für $x < 0$ ist $-x > 0$ und somit $0 < e^{-x} = 1/e^x$ und daher auch $e^x > 0$.

Aufgabe 2:
Bestimme die Menge

$$\{w \in \mathbb{C} \,|\, e^{w+z} = e^z \text{ für alle } z \in \mathbb{C}\}.$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
&\{w \in \mathbb{C} \,|\, e^{w+z} = e^z \text{ für alle } z \in \mathbb{C}\} \\
=&\{w \in \mathbb{C} \,|\, e^w = 1\} \\
=&\{w \in \mathbb{C} \,|\, e^{\mathrm{Re}(w)}\big(\cos(\mathrm{Im}(w)) + i \sin(\mathrm{Im}(w))\big) = 1\} \\
=&\{w \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(w) = 0 \text{ und } \mathrm{Im}(w) = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \\
=&\{i\, 2k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3:
Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Potenzreihen?

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} (x+2)^n \big(1 + \frac{1}{n}\big)^n$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 x^n}{n!}$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x-1)^n}{n^n}$

Lösung: Bemerkung: Es gilt (ohne Beweis:) $(1 + 1/n)^n \to e$.
a)

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n}} = 1$$

Also konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty}(x+2)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ auf $B(-2,1)=(-3,-1)$ und divergiert für $x<-3$ oder $x>-1$. Für $x=-3$ und $x=-1$ wissen wir noch nichts. Diese Fälle müssen gesondert betrachtet werden:
$x=-1$: Dann ist die Konvergenz der Reihe $\sum(-1+2)^n(1+1/n)^n = \sum(1+1/n)^n$ zu untersuchen. Diese Reihe divergiert, da $(1+1/n)^n \to e \neq 0$, also die zugrundeliegende Folge keine Nullfolge ist. Ganz ähnlich zeigt man, daß die Reihe für $x=-3$ divergiert. Somit konvergiert die Potenzreihe in der Tat nur auf $(-3,-1)$.

b)

$$\begin{aligned}\rho &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n!}\cdot\frac{(n+1)!}{(n+1)^3}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{(n+1)^2} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty\end{aligned}$$

Also konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3x^n}{n!}$ auf $\mathbb{K}$.

c)

$$\begin{aligned}\rho &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}\cdot\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} e\end{aligned}$$

Also konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(x-1)^n}{n^n}$ auf $B(1,e)=(1-e,1+e)$. Auch hier müssen die Randpunkte gesondert untersucht werden. Auf beiden divergiert die Reihe, was jedoch relativ kompliziert zu zeigen ist.

Aufgabe 4:
Die Funktionen $\cosh:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (Cosinus hyperbolicus) und $\sinh:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (Sinus hyperbolicus) sind definiert durch

$$\cosh(x) := \frac{1}{2}(e^x+e^{-x}) \quad \text{und} \quad \sinh(x) := \frac{1}{2}(e^x-e^{-x}) \quad x\in\mathbb{R}.$$

(i) Zeige, daß cosh eine gerade und sinh eine ungerade Funktion ist und skizziere den Graphen.

(ii) Zeige die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned}\cosh(x)+\sinh(x) &= e^x\\ \cosh^2(x)-\sinh^2(x) &= 1\\ \cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y)+\sinh(x)\sinh(y)\end{aligned}$$

Bemerkung: Entsprechend gilt $\sinh(x+y)=\sinh(x)\cosh(y)+\cosh(x)\sinh(y)$.

Lösung: (i)

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}(e^{-x} + e^x) = \cosh(-x)$$
$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2}(-(e^{-x} - e^x)) = -\sinh(-x)$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\cosh(x) + \sinh(x) &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) + \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = e^x \\
\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 &= \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 - \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 = \frac{1}{4} \cdot 4e^x e^{-x} = 1 \\
\cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) + \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) \\
&= \frac{1}{4}\left(e^{x+y} + e^{x-y} + e^{y-x} + e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{x-y} - e^{y-x} + e^{-x-y}\right) \\
&= \frac{1}{2}(e^{x+y} + e^{-x-y}) = \cosh(x+y)
\end{aligned}$$

Aufgabe 5:
Es sei
$$a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$
Zeige, daß zwar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bzw. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergieren, aber ihr Cauchyprodukt nicht. Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ auch absolut?

Lösung: Die Folge $\tilde{a}_n := \frac{1}{\sqrt{n}}$ ist eine monoton fallende reelle Nullfolge, daher konvergiert die alternierende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ nach dem Leibnitzkriterium. Für das Cauchyprodukt $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ mit $c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}$ gilt:

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \cdot \frac{(-1)^{n-k+1}}{\sqrt{n-k+1}} = (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}}$$

Da für $k \leq n$ gilt
$$k(n-k+1) = nk - k^2 + k \leq nk + k = (n+1)k \leq (n+1)^2,$$
so folgt
$$|c_n| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \to 1.$$
Damit ist (c_n) keine Nullfolge, die notwendige Bedingung für die Konvergenz der Reihe ist also nicht erfüllt.
Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert nicht absolut, da sonst, wie in der Übung gezeigt, auch das Cauchy-Produkt konvergieren würde. Man kann dies auch direkt sehen: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n}} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.