Lösungsskizzen

Aufgabe 1: Hier mit Begründungen. Diese wären in der Klausur nicht nötig.

(i) falsch: Das Produkt der Nullfunktion, die stetig ist, mit einer beliebigen unstetigen Funktion ist wieder die Nullfunktion, also stetig

(ii) wahr: Jede kompakte Menge ist abgeschlossen und der beliebige Schnitt abg. Mengen ist abgeschlossen.

(iii) falsch: z.B. $A=(0,1)$. Dann $\sup A = 1 \notin A$.

(iv) falsch: z.B. ist $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y)=0 \; \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$ stetig, aber das Bild der offenen Menge $(0,1)^2$ nicht: $f((0,1)^2)=\{0\}$ nicht offen in $\mathbb{R}$ (Statt $(0,1)^2$ geht natürlich jede offene Menge in $\mathbb{R}^2$)

(v) wahr: Sei $I\subset\mathbb{R}$ ein Intervall und $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig. Angenommen $f(I)$ sei kein Intervall. Dann gibt es $y_0 \notin f(I)$: $f(I)\cap(y_0,\infty)\neq\emptyset$ und $f(I)\cap(-\infty,y_0)\neq\emptyset$.
Sei $y_- \in f(I)\cap(-\infty,y_0)$ und $y_+\in(y_0,\infty)$, also gibt es x_- und $x_+ \in I$ mit $f(x_-)=y_-$, $f(x_+)=y_+$. Nach dem ZWS gibt es x_0 zwischen x_- und x_+ mit $f(x_0)=y_0$, also $y_0\in f(I)$ ↯.

(vi) <u>falsch</u>: Die Negation von [illegible]

$$\exists \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n \geq N : |x_n - x| \geq \varepsilon \quad \text{ist}$$

(*) $\forall \varepsilon > 0 \, \forall N \in \mathbb{N} \, \exists n \geq N : |x_n - x| < \varepsilon$.

(dies ist genau die Aussage, daß es eine gegen x konvergente Teilfolge gibt).

Betrachten wir $(x_n)_n = ((-1)^n)_n$ und $x = 1$, so konvergiert (x_n) nicht gegen 1, erfüllt aber (*).

(vii) <u>falsch</u>: Betrachte $a_n = \frac{1}{n}$ (harm. Reihe). Dann konv $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nicht, aber

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{n+1} \cdot n = \frac{n}{n+1} < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(viii) <u>wahr</u>:
Es ist $[-a, a]$ kompakt, also nimmt f auf $[-a, a]$ ihr Maximum an, d.h. es gibt $x_0 \in [-a, a]$ mit $f(x_0) = \sup_{x \in [-a, a]} f(x)$.

<u>Aufgabe 2</u>: Es seien $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_N$, $N \in \mathbb{N}$, offene Teilmengen von X.

Sei $x_0 \in \bigcap_{i=1}^{N} \mathcal{O}_i$ bel. Dann ist für jedes $i \in \{1, \dots, N\}$ $x_0 \in \mathcal{O}_i$ und da $\mathcal{O}_i$ offen ist gibt es $\varepsilon_i > 0 : B(x_0, \varepsilon_i) \subset \mathcal{O}_i$.

Wir setzen $\varepsilon := \min \{\varepsilon_i \mid i = 1, \dots, N\}$. Dann ist $\varepsilon > 0$ und $\varepsilon < \varepsilon_i \ \forall i \in \{1, \dots, N\}$, also

$$B(x_0, \varepsilon) \subset B(x_0, \varepsilon_i) \subset \mathcal{O}_i \ \forall i \in \{1, \dots, N\}.$$

Somit ist $B(x_0, \varepsilon) \subset \bigcap_{i=1}^{N} \mathcal{O}_i$, also $\bigcap_{i=1}^{N} \mathcal{O}_i$ offen. $\square$

<u>Aufgabe 3</u>: <u>wahr</u>: Angenommen $(a_n + b_n)_n$ würde konvergieren, $a_n + b_n \xrightarrow[n \to \infty]{} c \in \mathbb{R}$.
Da (a_n) konvergiert, $a_n \to a \in \mathbb{R}$, so konv. auch $(-a_n)$: $-a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} -a$.
Da die Summe von konv. Folgen konv., so konvergiert auch

$$b_n = a_n + b_n - a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} c - a \quad \lightning \quad \square$$

Aufgabe 4: Es ist $f: [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \sqrt{\sin^2(x) + x^2}$ wohldefiniert und als Komp. stetiger Funkt. stetig.

Weiterhin ist $f(-\pi) = \sqrt{\underbrace{\sin^2(-\pi)}_{=0} + \pi^2} = \pi > 1$,

$f(0) = \sqrt{0+0} = 0 < 1$,

$f(\pi) = \sqrt{\sin^2(\pi) + \pi^2} = \pi > 1$.

Nach dem ZWS gibt es also $x_1 \in [-\pi, 0]$ und $x_2 \in [0, \pi]$ mit $f(x_1) = 1 = f(x_2)$. $\square$

Aufgabe 5: Es ist

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x \leq 0, \end{cases}$$

da $|x| = \begin{cases} x & \text{für } x > 0 \\ -x & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$

Sei nun $\underline{x_0 < 0}$: Dann ist f in einer Umgebung von x_0 die Nullfunktion, also in x_0 diffbar

$x_0 > 0$: Dann ist $f(x) = 2x^2$ ein Polynom auf einer Umgebung von x_0, also in x_0 diffbar.

$\underline{x_0 = 0}$: Es ist $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{h|h| + h^2}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} (|h| + h) = 0$, also f in 0 diffbar